

用高中数学方法研究的一个概率模型问题

单身的你是否有过这样的经历：想要恋爱、结婚，却在眼前众多对象中挑花了眼睛，不知道如何才能选出最适合自己的一个，尽管你深信有很多的时间去选择伴侣，但是每当遇到一个对象时，总想：“如果下一个对象更好呢？”，基于这个想法，总是一再推迟婚约。有幸好，数学上有个办法可以对如何决策提供帮助。

我们假定遇到这个问题的是位男性，想找到理想伴侣，不妨就假设这个人叫小强吧。

通常来说，小强不可能把所有相亲对象都摆在面前逐一比较，她们总是一个接着一个出现在，下一个是谁，她是什么情况，小强是无法预知的。

现实生活中有许多情形和这个情境类似，如买房子、找工作等，给你的选择是一个接着一个来的，如果你拒绝了一个，就无法反悔，它不可能再回来了，比方说找工作别人已经签约，不再有名额。那么你该如何选择呢？

在这个例子中，我们假设婚介所、朋友、甚至小强自己给小强找到了 10 位相亲对象，她们逐个出现，我们给出一个极少见的有利条件，小强极有魅力，或相亲对象极渴望结婚，只要小强开口，就可以结婚。这 10 位女性中必然有一个成为小强的终身伴侣，但究竟选哪个呢？

虽然有点残酷，但我们还是将 10 位相亲对象按优劣排个顺序，但小强遇到她们的顺序是随机的。

如果小强选择第一个，那么选到的是最佳伴侣的可能是 $1/10$ 。如果看过这个不选，那么以后他所选择的一定会比这个好，但是如果始终怀着下一个有可能更好的想法，那么很有可能直到见最后一个人前还没选定，但是这时候已经到了结婚年龄的底线了，不得不选择最后一个结婚，这时候选到最佳伴侣的可能性依然是 $1/10$ 。

我们还有一个办法，那就是对第一个相亲对象(小马)说“不”，然后选择以后遇到的第一个比小马好的结婚，那么他将有 $9/10$ 的机会找到比小马好的对象，但如果小马就是最佳对象，那么这种决策方法就彻底失败了。其实通过下面的验证，这种方法的确提高了找到最佳伴侣的机会，大概提高到了 28%。

那么如果把一开始“随便看看”但一定说“不”的对象提高到两个、三个……,小强找到最佳伴侣的可能性会不会一直提高呢？究竟先看多少才开始选择能使这种可能性最高？我们不妨来看下面的模拟游戏

盲目相亲纸牌游戏

有 10 张纸牌，每张正面都写有不同的数字，游戏目的是认定一张数字最高的牌，我们称为目标牌。彻底洗一下牌，把它们正面朝下排成一行。



从左面开始，你可以随便看几张牌，看看最大的是几，把这个点数作为基准数，然后继续翻牌，第一张数字大于基准数的便是你要选择的牌，当然，刚开始的几张你已经不能选择

了。如果所有的数字都不大，那么无论数字如何，第 10 张牌你是非要不可的了。

那么究竟看几张牌再继续翻牌选择，才能使你确定的牌为目标牌的可能性最大呢？

我们把开始看的牌数戏称为“逢场作戏数”简称 PF 数(*playing the field*)。看看下面的运算过程：

1. 如果一张牌都不看，随意选择，显然选到目标牌的概率为 $1/10$ 。

下面的各种情形，为了方便说明，我们记

事件 $Y = \{\text{“找到目标牌”}\}$ ，事件 $A_i = \{\text{“第 } i \text{ 张牌为目标牌”}\}$, $i=1,2,3,\dots,10$,

根据全概率公式，事件 Y 发生的概率应该分成 10 种情况，事件 A_1 发生(第一张牌是目标牌)且事件 Y 发生(找到目标牌)，事件 A_2 发生且事件 Y 发生， $\dots$ ，事件 A_{10} 发生且事件 Y 发生。

即： $P(Y) = P(A_1 \cap Y) + P(A_2 \cap Y) + P(A_3 \cap Y) + \dots + P(A_{10} \cap Y)$

2. 如果 PF 数为 1，即翻看第一张牌，然后开始选择：

$P(A_1 \cap Y) = 0$ ，因为不可能选到第一张牌；

$P(A_2 \cap Y) = \frac{1}{10}$ ，如果第二张牌为目标牌，那它比第一张牌大，则必然在第二次翻看时被找到，所以事件 A_2 发生且事件 Y 发生的概率就等于事件 A_2 发生的概率；

$P(A_3 \cap Y) = \frac{C_9^2 \cdot 1 \cdot A_7^7}{A_{10}^{10}} = \frac{C_9^2}{A_{10}^3}$ ，如果第三张牌为目标牌，想要被找到，那么必然要求第

二张牌比第一张牌小，分子即为第三张为目标牌且第二张牌比第一张牌小的排列数；

$P(A_4 \cap Y) = \frac{C_9^3 \cdot A_2^2 \cdot 1 \cdot A_6^6}{A_{10}^{10}} = \frac{C_9^3 \cdot A_2^2}{A_{10}^4}$ ，如果第四张牌为目标牌，想要同时被找到，那

么必然要求第二张牌和第三张牌都比第一张牌小，分子即为第四张为目标牌且第二张牌和第三张牌都比第一张牌小的排列数；

.....

以此类推，有：

$P_1(Y) = P(A_1 \cap Y) + P(A_2 \cap Y) + P(A_3 \cap Y) + \dots + P(A_{10} \cap Y)$

$$\begin{aligned} &= 0 + \frac{1}{10} + \frac{C_9^2}{A_{10}^3} + \frac{C_9^3 \cdot A_2^2}{A_{10}^4} + \frac{C_9^4 \cdot A_3^3}{A_{10}^5} + \dots + \frac{C_9^9 \cdot A_8^8}{A_{10}^{10}} \\ &= 0 + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{40} + \dots + \frac{1}{90} \approx 0.283 \end{aligned}$$

3. 如果 PF 数为 1，即翻看前两张牌，然后开始选择：

$P(A_1 \cap Y) = P(A_2 \cap Y) = 0$ ，因为不可能选到第一、第二张牌；

$P(A_3 \cap Y) = \frac{1}{10}$ ，如果第三张牌为目标牌，那它比第一、第二张牌都大，则必然在第

三次翻看时被找到，所以事件 A_3 发生且事件 Y 发生的概率就等于事件 A_3 发生的概率；

$$P(A_4 \cap Y) = \frac{C_9^3 \cdot 2 \cdot A_2^2 \cdot A_6^6}{A_{10}^{10}} = \frac{2 \cdot C_9^3 \cdot A_2^2}{A_{10}^4}, \text{ 如果第四张牌为目标牌, 想要被找到, 那么}$$

必然要求第三张牌比第一、第二张牌中较大的一张小, 分子即为第三张牌比第一、第二张牌中较大的一张小的排列数(从除了目标牌外的 9 张中选出三张作前三张, 这三张中的最大一张放在第一位或第二位, 其余两张在剩下的两个位置全排列, 目标牌放在第四位, 余下的 6 张牌全排列);

$$P(A_4 \cap Y) = \frac{C_9^4 \cdot 2 \cdot A_3^3 \cdot 1 \cdot A_5^5}{A_{10}^{10}} = \frac{2 \cdot C_9^4 \cdot A_3^3}{A_{10}^5}, \text{ 如果第五张牌为目标牌, 想要同时被找到,}$$

那么必然要求第二张牌和第三张牌都比前两张牌中较大的数字小, 分子即为这个排列数;

.....

以此类推, 有:

$$\begin{aligned} P_2(Y) &= P(A_1 \cap Y) + P(A_2 \cap Y) + P(A_3 \cap Y) + \cdots + P(A_{10} \cap Y) \\ &= 0 + 0 + \frac{1}{10} + \frac{2 \cdot C_9^3 \cdot A_2^2}{A_{10}^4} + \frac{2 \cdot C_9^4 \cdot A_3^3}{A_{10}^5} + \frac{2 \cdot C_9^5 \cdot A_4^4}{A_{10}^6} + \cdots + \frac{2 \cdot C_9^9 \cdot A_8^8}{A_{10}^{10}} \\ &= 0 + 0 + \frac{2}{20} + \frac{2}{30} + \frac{2}{40} + \cdots + \frac{2}{90} \approx 0.366 \end{aligned}$$

4. 由上述结论类推

$$\begin{aligned} P_3(Y) &= P(A_1 \cap Y) + P(A_2 \cap Y) + P(A_3 \cap Y) + \cdots + P(A_{10} \cap Y) \\ &= 0 + 0 + 0 + \frac{1}{10} + \frac{3 \cdot C_9^4 \cdot A_3^3}{A_{10}^5} + \frac{3 \cdot C_9^5 \cdot A_4^4}{A_{10}^6} + \cdots + \frac{3 \cdot C_9^9 \cdot A_8^8}{A_{10}^{10}} \\ &= 0 + 0 + 0 + \frac{3}{30} + \frac{3}{40} + \frac{3}{50} + \cdots + \frac{3}{90} \approx 0.399 \end{aligned}$$

5. 我们甚至不用列排列式, 直接类推:

$$P_4(Y) = 0 + 0 + 0 + 0 + \frac{4}{40} + \frac{4}{50} + \frac{4}{60} + \cdots + \frac{4}{90} \approx 0.398$$

$$P_5(Y) = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \frac{5}{50} + \frac{5}{60} + \frac{5}{70} + \cdots + \frac{5}{90} \approx 0.373$$

$$P_6(Y) = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \frac{6}{60} + \frac{6}{70} + \frac{6}{80} + \frac{6}{90} \approx 0.327$$

$$P_7(Y) = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \frac{7}{70} + \frac{7}{80} + \frac{7}{90} \approx 0.265$$

$$P_8(Y) = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \frac{8}{80} + \frac{8}{90} \approx 0.189$$

$$P_9(Y) = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \frac{9}{90} = 0.1$$

由上面 1-5 的计算我们可以看到, 最初看三张牌再继续翻牌选择能使你确定的牌为目标牌的可能性最大。

通过上面的纸牌模拟游戏我们可以看到，开篇的相亲问题在数学上存在一个最优解，那就是，先同三个女朋友约会，但不做出任何承诺，然后向第一位比三个人都强的女朋友结婚。如果用这种方法，找到最佳伴侣的概率就会提高到三分之一，并且这个概率是所有方案中最大的。

尽管现实生活往往比我们的运算情境复杂得多，这个结论还是证明了许多精明人在求婚前多谈几位女朋友的做法有一定道理。如果对方人数增大时，数学答案将接近于一个很有名且很特殊的比值。譬如说，假定一共有 N 个人可以谈朋友，那么你应该在观察过 N/e 人后再做出承诺，这里 e 是自然对数的底数，约等于 2.718。也就是说，当 N 是一个很大的自然数时，你应当同 37% 左右的女性谈过朋友以后，最后才把婚姻大事定下来。

这个狡猾的计划当然有着很大的缺点，其中之一是，你究竟会遇上多少位可以作为伴侣的异性朋友，你是完全心中无数的。这就需要我们作出估计了。

附：下面是用高中人教版必修3教材中算法一章所用的 scilab 软件模拟的 PF=1 和 PF=2 的算法语句，输入实验次数，即可给出找到最佳伴侣的频率，可以用它检验我们所计算概率的准确性。

```
n=input("n=");c=0;
for k=1:n
    for i=1:10
        a(i)=rand();
    end
    m=a(1);
    for j=2:10
        if m<a(j)
            m=a(j);
        end
    end
    j=2;
    while j<=10
        if a(j)>a(1)
            b=a(j);j=12;
        else j=j+1;
        end
    end
    if b==m
        c=c+1;
    end
end
p=c/n
```

```
n=input("n=");c=0;
for k=1:n
    for i=1:10
        a(i)=rand();
    end
    m=a(1);
    for j=2:10
        if m<a(j)
            m=a(j);
        end
    end
    j=3;
    while j<=10
        if a(j)>a(1)&a(j)>a(2)
            b=a(j);j=12;
        else j=j+1;
        end
    end
    if b==m
        c=c+1;
    end
end
p=c/n
```