高 2018 级高二上第 3 次月考理科数学

一、选择题（每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．）

1．过点$\left(-1,3\right)$且与直线$2x+y+3=0$垂直的直线方程为（　　）

A. $x-2y+7=0$　　B. $2x-y+5=0$　　C. $x-2y-5=0$

D. $2x+y-5=0$

2．双曲线$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{3}=1$的焦点到其渐近线距离为（　　）

A．1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D．2

3．下列说法不正确的（　　）

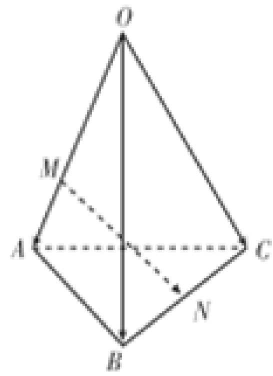
A.若“p且q”为假，则p，q至少有一个是假命题

B.命题“$\exists x\in R,x^2-x-1<0$”的否定是“$\forall x\in R,x^2-x-1\geq 0$”

C. 当$\alpha<0$时，幂函数$y=x^{\alpha}$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递减

D. “$\varphi=\frac{\pi}{2}$”是“$y=\sin\left(2x+\varphi\right)$为偶函数”的充要条件

4．如图，空间四边形$OABC$中，$\overrightarrow{OA}=a,\overrightarrow{OB}=b,\overrightarrow{OC}=c$，点$M$在$OA$上，且$OM=2MA,N$是$BC$的中点，则$\overrightarrow{MN}=$（　　）



A. $\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$　　B. $-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

C. $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{c}$　　D. $\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}$

5．下列命题中正确命题的个数是（　　）

①过空间任意一点有且仅有一个平面与已知平面垂直

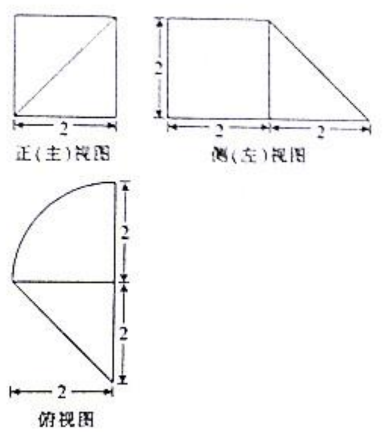
②过空间任意一条直线有且仅有一个平面与已知平面垂直

③过空间任意一点有且仅有一个平面与已知的两条异面直线平行

④过空间任意一点有且仅有一条直线与已知平面垂直

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

6．P为抛物线$y^2=-4x$上一点，$A\left(0,1\right)$，则P到此抛物线的准线的距离与P到点A的距离之和的最小值为（　　）



A．$\frac{1}{2}$　　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　　C．$\frac{\sqrt{5}}{2}$　　　D．$\sqrt{2}$

7．某几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积是（　　）

A．$4\pi+4$　　　B．$4\pi+\frac{4}{3}$

C．$2\pi+\frac{4}{3}$　　　D．$2\pi+4$

8．已知圆$C:x^2+y^2=12$，直线$l:4x+3y=25$，求圆C上任取一点A到直线l的距离小于2的概率（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　　B．$\frac{1}{3}$　　　C．$\frac{1}{4}$　　　D．$\frac{1}{6}$

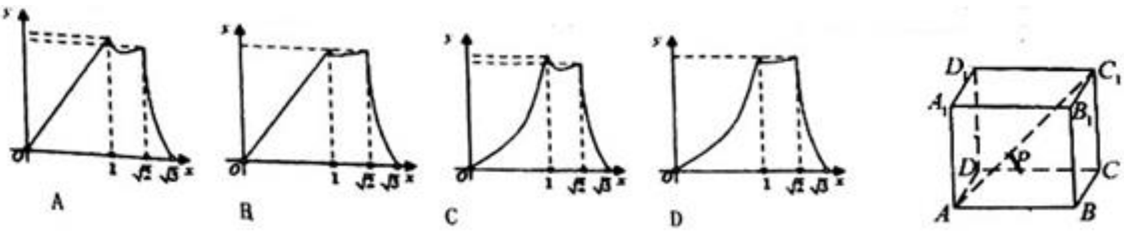
9．正四棱锥$S-ABCD$中，O为顶点在底面上的射影，P为侧棱**错误!未找到引用源。**的中点，且$SO=OD$，则直线BC与**错误!未找到引用源。**所成的角的余弦值为（　　）

A．$\frac{\sqrt{33}}{6}$　　　B．$\frac{\sqrt{6}}{3}$　　　C．$\frac{\sqrt{3}}{6}$　　　D．$\frac{\sqrt{3}}{3}$

10．已知两定点$A(-1,0)$和$B(1,0)$，动点$P(x,y)$在直线$l:y=x+3$上移动，椭圆C以A，B为焦点且经过点P，则椭圆C的离心率的最大值为（　　）

A．$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　　B．$\frac{\sqrt{10}}{5}$　　　C．$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　　D．$\frac{2\sqrt{10}}{5}$

11．如图，在棱长为1的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的对角线AC_1上取一点P，以A为球心，AP为半径作一个球，设$AP=x$，记该球面与正方体表面的交线的长度和为$f(x)$，则函数$f(x)$的图像最有可能的是（　　）



12．已知点P为椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$上的动点，$EF$为圆$N$: $x^2+(y-1)^2=1$的任一直径，求$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}$最大值和最小值是（　　）

A．16，$12-4\sqrt{3}$　　　B．19，$12-4\sqrt{3}$　　　C．$17,13-4\sqrt{3}$　　　D．20，$13-4\sqrt{3}$

二、填空题（每小题5分，共20分，把答案填在答题卡的相应位置.）

13．若长方体一个顶点上三条棱的长分别是$3,4,5$（单位:cm），且它的八个顶点都在同一个球面上，则这个球的表面积(单位:cm^2)是_________.

14．直线$l_1:(3+a)x+4y=5-3a$和直线$l_2:2x+(5+a)y=8$平行，则$a=$_______.

15．已知正四面体$ABCD$，则直线BC与平面ACD所成角的正弦值为_______.

16．圆$x^2+y^2=9$的切线MT过双曲线$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{12}=1$的左焦点$F$，其中$T$为切点，$M$为切线与双曲线右支的交点，$P$为$MF$的中点，$O$为坐标原点，则$|PO|-|PT|=$__________.

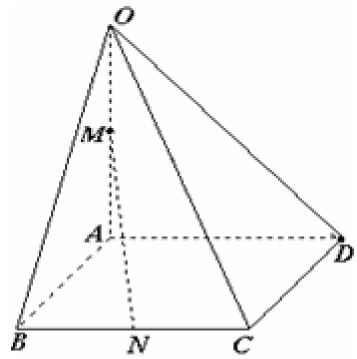
三、解答题（共70分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

17．（10分）已知命题p:“$\dfrac{2x^2}{m}+\dfrac{y^2}{m-1}=1$是焦点在$x$轴上的椭圆的标准方程”，命题$q$: $\exists x_1\in R,8{x_1}^2-8mx_1+7m-6=0$. 若$p\vee q$为真命题，$p\wedge q$为假命题，求实数$m$的取值范围.

18．（12分）如图，在四棱锥$O-ABCD$中，底面$ABCD$是边长为1的菱形，$\angle ABC=\dfrac{\pi}{4}$，$OA\perp$底面$ABCD$，$OA=2$，$M$为$OA$的中点，$N$为$BC$的中点.

（1）证明：直线MN//平面OCD.

（2）求三棱锥$N-CDM$的体积；



19.（12 分）已知抛物线 $x^2=4y$ 的焦点为 F， P 为该抛物线上的一个动点.

（1）当|PF|=2 时，求点 P 的坐标；

（2）过 F 且斜率为 1 的直线与抛物线交与两点 AB，若 P 在弧 AB 上，求 ΔPAB 面积的最大值.

20.（12 分）已知圆 C：$x^2+y^2+2x-4y+3=0$.

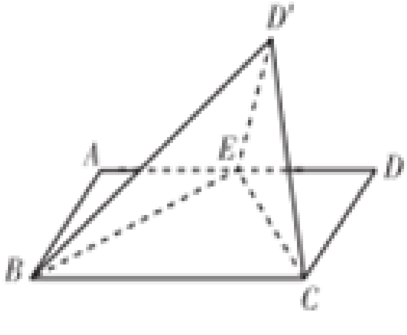
（1）若圆 C 的切线在 x 轴、y 轴上的截距相等，求切线方程；

（2）从圆 C 外一点 P（x_1，y_1）向该圆引一条切线，切点为 M 且有|PM|=|PO|（O 为原点），求使|PM|取得最小值时点 P 的坐标.

21.（12 分）如图所示，在矩形 $ABCD$ 中，$AD=2AB=2$，点 E 是 AD 的中点，将 ΔDEC 沿 CE 折起到 $\Delta D'EC$ 的位置，使二面角 $D'-EC-B$ 是直二面角.

（1）证明: $BE\perp CD'$；

（2）求二面角 $D'-BC-E$ 的余弦值.



22．（12分）已知椭圆G的中心是原点O，对称轴是坐标轴，抛物线$y^2=4\sqrt{3}x$的焦点是G的一个焦点，且离心率$e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

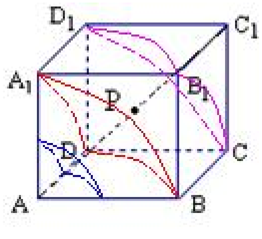
（I）求椭圆G的方程；

（II）已知圆M的方程是$x^2+y^2=R^2$（$1<R<2$），设直线l：$y=kx+m$与圆M和椭圆G都相切，且切点分别为A，B. 求当R为何值时，$|AB|$取得最大值？并求出最大值.

数学答案

1 A.2 C. 3 D.4 B.5 A. 6 D. 7C 8 D. 9 C 10 A. 11 B 12 B

11【解析】:球面与正方体的表面都相交,我们考虑三个特殊情形:(1)当$x=1$;(2)当$x=\dfrac{1}{2}$;（3）当$x=\sqrt{2}$.（1）当$x=1$时，以A为球心，1为半径作一个球，该球面与正方体表面的交线弧长为$3\times\dfrac{1}{4}\times2\pi\times1=\dfrac{3\pi}{2}$，且为函数$f\left(x\right)$的最大值;（2）当$x=\dfrac{1}{2}$时，以$A$为球心，$\dfrac{1}{2}$为半径作一个球，根据图形的相似，该球面与正方体表面的交线弧长为（1）中的一半;（3）当$x=\sqrt{2}$时，以A为球心，$\sqrt{2}$为半径作一个球，其弧长为$3\times\dfrac{1}{4}\times2\pi\times1=\dfrac{3\pi}{2}$，且为函数$f\left(x\right)$的最大值，对照选项可得B正确.



考点：函数图象.

12【解析】：因为$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}=(\overrightarrow{NE}-\overrightarrow{NP})\cdot(\overrightarrow{NF}-\overrightarrow{NP})=\overrightarrow{NE}\cdot\overrightarrow{NF}-\overrightarrow{NP}(\overrightarrow{NE}+\overrightarrow{NF})+\overrightarrow{NP}^2=-1+|NP|^2$，设

$P(x_0,y_0)$，又因为点$P(x_0,y_0)$在椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$，所以$\frac{{x_0}^2}{16}+\frac{{y_0}^2}{12}=1$，

$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}=-1+|NP|^2=-1+{x_0}^2+(y_0-1)^2=-1+16(1-\frac{{y_0}^2}{12})+{y_0}^2-2y_0+1=-\frac{1}{3}(y_0-3)^2+19$

，

（$y_0\in[-2\sqrt{3},2\sqrt{3}]$）所以有当$y_0=3$时，取最大19；当$y_0=-2\sqrt{3}$时，取最小$12-4\sqrt{3}$，故选 B.

考点：向量的数量积，函数最值.

13【解析】根据球与长方体的组合体的结构特征可知，长方体的体对角线为球的直径，所以$2r=\sqrt{3^2+4^2+5^2}=5\sqrt{2}$，所以球的半径为$r=\frac{5\sqrt{2}}{2}$，所以球的表面积为$S=4\pi r^2=50\pi$.

考点：长方体与球的组合体及球的表面积公式.

14【解析】由直线平行的充要条件得：$(3+a)(5+a)=2\times4$，解得$a=-1$或-7；当$a=-1$时，直线l_1与l_2都等于$x+2y-4=0$重合，不符合题意，所以$a=-7$. 故答案为−7.

考点：直线平行的充要条件.

15　$\frac{\sqrt{6}}{3}$

16 记右焦点$F',|TF|=\sqrt{|OF|^2-|OT|}^2=b\Rightarrow|PT|=|PF|-|TF|=\frac{1}{2}|MF|-b,|PO|=\frac{1}{2}|PF'|$

$\Rightarrow|PO|-|PT|=b-\frac{1}{2}(|MF|-|MF'|)=b-a=2\sqrt{3}-3$.

考点：1、直线与圆；2、直线与双曲线.

17【解析】如果p为真命题，则有$\frac{m}{2}>m-1>0$，即$1<m<2$；

若果q为真命题，则$m\le\frac{3}{2}$或$m\ge2$.

因为$p\vee q$为真命题，$p\wedge q$为假命题，所以p和q一真一假，

所以实数m的取值范围为$(-\infty,1]\cup(\frac{3}{2},+\infty)$

18.解：（1） 略

(2) $V_{N-CDM}=V_{M-CDN}=\dfrac{\sqrt{2}}{48}$

19【解析】(1)将圆 C 化成标准方程得 $(x+1)^2+(y-2)^2=2$，

①当直线在两坐标轴上的截距为零时，设直线方程为 $y=kx$，由直线与圆相切得

$\dfrac{|-k-2|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{2}$，即 $k=2\pm\sqrt{6}$，从而切线方程为 $y=(2\pm\sqrt{6})x$.

②当直线在两坐标轴上的截距不为零时，设直线方程为 $x+y-a=0$，由直线与圆相切得

$x+y+1=0$ 或

$x+y-3=0$.

(2)由 $|\overrightarrow{PO}|=|\overrightarrow{PM}|$ 得 ${x_1}^2+{y_1}^2=(x_1+1)^2+(y_1-2)^2-2\Rightarrow 2x_1-4y_1+3=0$.

即点 P 在直线 l 为 $2x-4y+3=0$ 上，$|\overrightarrow{PM}|$ 取最小值时，即 $|\overrightarrow{OP}|$ 取得最小值，直线 OP⊥l，

于是直线 l_{OP} 的方程为 $2x+y=0$.

解方程组 $\begin{cases}2x+y=0\\2x-4y+3=0\end{cases}$ 得 P 点坐标为 $(-\dfrac{3}{10},\dfrac{3}{5})$.

考点：直线与圆相交的性质

20【解析】(Ⅰ)由抛物线 $x^2=4y$ 的焦点为 F，P 为该抛物线在上的一个动点，

故设 P（a，$\dfrac{a^2}{4}$），

∵|PF|=2，结合抛物线的定义得，$\dfrac{a^2}{4}+1=2$，∴a=±2，

∴点 P 的坐标为（±2，1）；

(Ⅱ)过 F 的直线方程为 $y=x+1$

由 $\begin{cases}y=x+1\\x^2=4y\end{cases}$ 有 $y^2-6y+1=0$

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=6$，$|AB|=8$

P 在弧 AB 上，要使 ΔPAB 面积最大时，则过 P 点的直线 l 平行于直线 AB 且与抛物线相切

设直线 l 方程为 $y=x+m$

由$\begin{cases} y = x + m \\ x^2 = 4y \end{cases}$有$x^2 - 4x - 4m = 0$

直线l与抛物线相切时， $\Delta = 0$有$m = -1$

此时，两直线的距离为$d = \sqrt{2}$

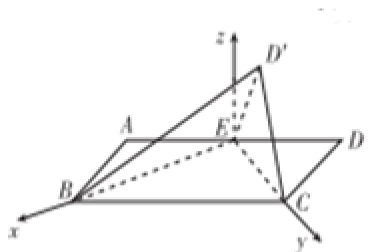
$(S_{\Delta PAB})_{\max} = 4\sqrt{2}$

21【解析】(1) $\because AD = 2AB = 2, E$是AD的中点，$\therefore \Delta BAE, \Delta CDE$是等腰直角三角形，

易知，$\angle BEC = 90^\circ$，即$BE \perp EC$．$\because$又平面$D'EC \perp$平面BEC，面$D'EC \cap$面$BEC = EC \therefore BE \perp$面$D'EC$，又$CD' \subset$面$D'EC, \therefore BE \perp CD'$.

(2) 法一：分别以EB, EC所在的直线为x轴、y轴，过E垂直于平面BEC的射线为z轴，建立空间直角坐标系，则$B\left(\sqrt{2},0,0\right), C\left(0,\sqrt{2},0\right), D'\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \overrightarrow{BC} = \left(-\sqrt{2},\sqrt{2},0\right), \overrightarrow{D'C} = \left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

设平面BEC的法向量为$\overrightarrow{n_1} = (0,0,1)$；平面$D'BC$的法向量为$\overrightarrow{n_2} = (x_2, y_2, z_2)$. 由



$$\begin{cases} \overrightarrow{n_2} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{n_2} \cdot \overrightarrow{D'C} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{2}x_2 + \sqrt{2}y_2 = 0, \text{取} x_2 = 1, \text{得} \overrightarrow{n_2} = (1,1,1) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}y_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}z_2 = 0, \therefore \cos\left\langle \overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2} \right\rangle = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases},$$

$\therefore$二面角$D' - BC - E$的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

法二：取 EC 中点 O，连结 D’ O, 则$D'O \perp$平面ABC，找出二面角的平面角

考点：空间中直线与平面的垂直关系及二面角的求法.

22【解析】(I) 依题意可设椭圆G的方程为$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$，则

因为抛物线$y^2 = 4\sqrt{3}x$的焦点坐标为$\left(\sqrt{3},0\right)$，所以$c = \sqrt{3}$

又因为$e = \frac{\sqrt{3}}{2}$，所以$\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$，所以$a = 2, b = \sqrt{a^2 - c^2} = 1$

故椭圆G的方程为$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. ……………5分

(II) 由题意易知直线l的斜率存在，所以可设直线l： $y = kx + m$，即$kx - y + m = 0$

∵直线l和圆M相切　∴$\frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}=R$，即$m^2=R^2(k^2+1)$①

联立方程组

$\begin{cases} y=kx+m \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$消去$y$整理可得$(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-4=0$，

∵直线l和椭圆G相切

∴$\Delta=64k^2m^2-4(1+4k^2)(4m^2-4)=0$，即$m^2=4k^2+1$②

由①②可得$k^2=\frac{R^2-1}{4-R^2},m^2=\frac{3R^2}{4-R^2}$

现在设点B的坐标为(x_0,y_0)，则有${x_0}^2=\frac{4m^2-4}{1+4k^2}=\frac{16R^2-16}{3R^2}$，

${y_0}^2=1-\frac{{x_0}^2}{4}=\frac{4-R^2}{3R^2}$，

所以$|OB|^2={x_0}^2+{y_0}^2=\frac{15R^2-12}{3R^2}=5-\frac{4}{R^2}$，

所以$|AB|^2=|OB|^2-|OA|^2=5-\frac{4}{R^2}-R^2=5-(R^2+\frac{4}{R^2})\le 5-2\sqrt{R^2\cdot\frac{4}{R^2}}=1$

等号仅当$R^2=\frac{4}{R^2}$,即$R=\sqrt{2}$取得

故当$R=\sqrt{2}$时，$|AB|$取得最大值，最大值为1.