

数学试卷 高一 参考答案

16. 教材 106 页 B-1 改编。 $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{2}, & x \geq 1 \\ \log_2 x, & 0 < x < 1 \end{cases}$

$$\therefore (C_P A) \cap B = \{x \mid 2 < x < 3 \text{ 或 } 7 \leq x < 10\}$$

18. (1) 当 $a=2$ 时, $f(x)=2 \cdot (2^x)^2 - 2^x - 1$

$$\text{令 } t = 2^x, \quad x \in [-1, 1], \quad t \in [\frac{1}{2}, 2]$$

$$y = 2t^2 - t - 1 = 2(t - \frac{1}{4})^2 - \frac{9}{8}, t \in [\frac{1}{2}, 2],$$

值域为 $[-1, 5]$ 6 分

(2)关于 x 的方程 $a \cdot 4^x - 2^x - 1 = 0$ 有解, 等价于 $at^2 - t - 1 = 0$ 在 $t \in (0, +\infty)$ 上有解

法一: 当 $a = 0$ 时, 解为 $t = -1 < 0$, 不成立

当 $a < 0$ 时, 开口向下, 对称轴 $t = \frac{1}{4a} < 0$, 过点 $(0, -1)$, 不成立

当 $a > 0$ 时, 开口向上, 对称轴 $t = \frac{1}{4a} > 0$, 过点 $(0, -1)$, 必有一正根,

综上, $a > 0$

法二: 显然, $t \neq 0$, $a = \frac{t+1}{t^2} = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t} = \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

只 需 求 $\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ 的 值 域 ,

$a > 0$ 12 分

19. (I)
略;

6 分

(II) $a < -1$ 或 $a > 1$ 12 分

20. (1) 设 $x \in [-2, 2]$ 时, $f(x) = ax^2 + b$, 代入 $f(0) = -1$, $f(2) = -\frac{1}{4}$, $f(x) = \frac{3}{16}x^2 - 1$

设 $x \in [2, 4]$ 时, $f(x) = \log_c x$, 代入 $f(2) = -\frac{1}{4}$, $f(x) = \log_{\frac{1}{16}} x$

因为 $f(x)$ 是偶函数, 所以 $x \in [-4, -2]$ 时, $f(x) = \log_{\frac{1}{16}}(-x)$

$$\text{所以 } f(x) = \begin{cases} \log_{\frac{1}{16}} x, x \in [2, 4] \\ \frac{3}{16}x^2 - 1, x \in [-2, 2] \\ \log_{\frac{1}{16}}(-x), x \in [-4, -2] \end{cases}$$

函 数 $f(x)$ 的 增 区 间 是 $[-4, -2]$ 和 $[0, 2]$, 减 区 间 是 $[0, 2]$ 和

$[2, 4]$,6 分

(2) 值 域

$[-1, -\frac{1}{4}]$,8 分

分

(3)由图像知：当 $m > -\frac{1}{4}$ 时，无解；当 $m = -\frac{1}{4}$ 时，2解；当 $-\frac{1}{2} \leq m < -\frac{1}{4}$ 时，4解；
当 $-1 < m < -\frac{1}{2}$ 时，2解；当 $m = -1$ 时，1解；当 $m < -1$ 时，无解。……

12分

21. 解：(1) 设每年降低的百分比为 x ($0 < x < 1$)。

设经过 M 年剩余面积为原来的 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，则 $a(1-x)^{10} = \frac{1}{2}a \Rightarrow 10 \lg(1-x) = \lg \frac{1}{2}$

$$\text{又 } a(1-x)^M = \frac{\sqrt{2}}{2}a \Rightarrow M \lg(1-x) = \lg \frac{\sqrt{2}}{2} \therefore \frac{10}{M} = \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{2} = 2 \Rightarrow M = \frac{10}{2} = 5$$

$\therefore$ 到今年为止，已砍伐了5

年

……………6分

(2) 设从今天开始，以后砍了 N 年，则 N 年后剩余面积为 $\frac{\sqrt{2}}{2} a(1-x)^N$ 由题意，

$$\text{有 } \frac{\sqrt{2}}{2} a(1-x)^N \geq \frac{1}{4}a \text{ 即 } \frac{\sqrt{2}}{2} (1-x)^N \geq \frac{1}{4},$$

$$\text{由(1)知 } (1-x)^{10} = \frac{1}{2} \Rightarrow 1-x = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{10}}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{N}{10}} \geq \frac{1}{4}, \text{ 化成 } \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{N}{10}} \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \therefore \frac{N}{10} \leq \frac{3}{2} \therefore N \leq 15$$

故 今 后 最 多 还 能 砍 伐 15

年

……………12分

22. (1)

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{3^{-x}}{9^{-x}+1}, & -2 \leq x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ \frac{3^x}{9^x+1}, & 0 < x \leq 2 \end{cases},$$

……………4分

$$(2) \text{任取 } 0 < x_1 < x_2 < 2, f(x_1) - f(x_2) = \frac{3^{x_1}}{9^{x_1}+1} - \frac{3^{x_2}}{9^{x_2}+1} = \frac{3^{x_1}9^{x_2} + 3^{x_1} - 3^{x_2}9^{x_1} - 3^{x_2}}{(9^{x_1}+1)(9^{x_2}+1)}$$

$$= \frac{3^{x_1} 3^{x_2} (3^{x_2} - 3^{x_1}) + (3^{x_1} - 3^{x_2})}{(9^{x_1} + 1)(9^{x_2} + 1)} = \frac{(3^{x_2} - 3^{x_1})(3^{x_1} 3^{x_2} - 1)}{(9^{x_1} + 1)(9^{x_2} + 1)}$$

$$\because 0 < x_1 < x_2 < 2, \therefore 3^{x_2} > 3^{x_1}, 3^{x_1} 3^{x_2} > 1$$

$$\text{即 } 3^{x_2} - 3^{x_1} > 0, 3^{x_1} 3^{x_2} - 1 > 0, (9^{x_1} + 1)(9^{x_2} + 1) > 0, \therefore f(x_1) - f(x_2) > 0$$

因此： $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递

减。

.....8 分

(3) 方程 $f(x) = \lambda$ 在 $x \in [-2, 2]$ 上有实数解即 λ 取函数 $f(x)$ 的值域内的任意值由 (2) 可

知, $f(x)$ 在 $x \in (0, 2]$ 上是减函数, 此时 $f(x) \in \left[\frac{9}{82}, \frac{1}{2} \right)$,

又 $\because f(x)$ 是 $x \in [-2, 2]$ 上的奇函数

$$\therefore x = 0, f(x) = 0$$

$$x \in [-2, 0), f(x) \in \left[-\frac{1}{2}, -\frac{9}{82} \right]$$

因此, 函数 $f(x)$ 的值域为 $\left[-\frac{1}{2}, -\frac{9}{82} \right] \cup \{0\} \cup \left[\frac{9}{82}, \frac{1}{2} \right)$

因

此

,

$$\lambda \in \left[-\frac{1}{2}, -\frac{9}{82} \right] \cup \{0\} \cup \left[\frac{9}{82}, \frac{1}{2} \right)$$

...

.....12 分