2016-2017 学年高三（上）期末数学试卷（高补班）

一、选择题

1．在一个不透明的袋子里，有三个大小相等小球（两黄一红），现在分别由 3 个同学无放回地抽取，如果已知第一名同学没有抽到红球，那么最后一名同学抽到红球的概率为（　　）

A．$\frac{1}{3}$　B．$\frac{2}{3}$　C．$\frac{1}{2}$　D．无法确定

2．$\sin 2\alpha=\frac{24}{25}$，$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，则$\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha)$的值为（　　）

A．$-\frac{1}{5}$　B．$\frac{1}{5}$　C．$-\frac{7}{5}$　D．$\frac{7}{5}$

3．某服装加工厂某月生产 A、B、C 三种产品共 4000 件，为了保证产品质量，进行抽样检验，根据分层抽样的结果，企业统计员制作了如下的统计表格：

产品类别	A	B	C
产品数量（件）		2300	
样本容量（件）		230	

由于不小心，表格中 A、C 产品的有关数据已被污染看不清楚，统计员记得 A 产品的样本容量比 C 产品的样本容量多 10，根据以上信息，可得 C 的产品数量是（　　）

A．80　B．800　C．90　D．900

4．α是第四象限角，$\cos\alpha=\frac{12}{13}$，则 $\sin\alpha=$（　　）

A．$\frac{5}{13}$　B．$-\frac{5}{13}$　C．$\frac{5}{12}$　D．$-\frac{5}{12}$

5．已知变量 x，y 满足约束条件$\begin{cases}x+y\geqslant 1\\3x+y\leqslant 3\\x\geqslant 0\end{cases}$，则目标函数 z=2x+y 的最小值是（　　）

A．4　B．3　C．2　D．1

6．设集合 $A=\{x|x^2-x-2>0\}$，$B=\{x||x|<3\}$，则 $A\cap B=$（　　）

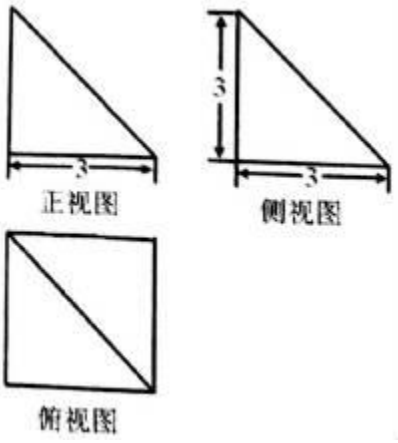
A．$\{x|-3<x<-1\}$　B．$\{x|2<x<3\}$

C．$\{x|-3<x<-1$ 或 $2<x<3\}$　D．$\{x|-3<x<-2$ 或 $1<x<3\}$

7．若 a、b 是任意实数，且 a＞b，则下列不等式成立的是（　　）

A．$a^2>b^2$　B．$\frac{b}{a}<1$　C．lg（a－b）＞0　D．$(\frac{1}{3})^a<(\frac{1}{3})^b$

8．如图为某几何体的三视图，则该几何体的外接球的表面积为（　　）



A．$\frac{27}{2}\pi$　B．27π　C．$27\sqrt{3}\pi$　D．$\frac{27\sqrt{3}\pi}{2}$

9．已知 A 是△ABC 的内角，则“$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$”是“$\tan A=\sqrt{3}$”的（　　）

A．充分不必要条件 B．必要不充分条件

C．充要条件　D．既不充分也不必要条件．

10．“$2^a>2^b$”是“$\log_2 a>\log_2 b$”的（　　）

A．充分不必要条件 B．必要不充分条件

C．充要条件　D．既不充分也不必要条件

11．下列各式中，值为$\sqrt{3}$的是（　　）

A．sin15°cos15° B．$\cos^2\frac{\pi}{12}-\sin^2\frac{\pi}{12}$

C．$\frac{1+\tan 15^0}{1-\tan 15^0}$ D．$\sqrt{\frac{1+\cos 30°}{2}}$

12．函数函数 f（x）=（x－3）e^x 的单调递增区间是（　　）

A．（－∞，2）　B．（0，3）　C．（1，4）　D．（2，+∞）

二、填空题

13．在△ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，A=60°，b=2，$S_{△ABC}=2\sqrt{3}$，则 a=____．

14．已知 tanα，tanβ分别是 lg（$6x^2$－5x+2）=0 的两个实根，则 tan（α+β）=____．

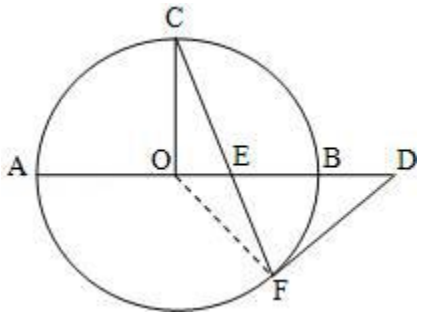
15．函数 f（x）=a^{x-2015}+2015（a＞0 且 a≠1）过定点 A，则点 A 的坐标为____．

16．已知向量$\vec{a}$=（x，2），$\vec{b}$=（2，1），$\vec{c}$=（3，x），若$\vec{a}$∥$\vec{b}$，则向量$\vec{a}$在向量$\vec{c}$方向上的投影为____．

三、解答题

17．已知集合 A={1，3，x^2}，B={x+2，1}．是否存在实数 x，使得 B⊆A？若存在，求出集合 A，B；若不存在，说明理由．

18．如图，已知 AB 为⊙O 的直径，C，F 为⊙O 上的两点，OC⊥AB，过点 F 作⊙O 的切线 FD 交 AB 的延长线于点 D，连接 CF 交 AB 于点 E．求证：DE^2=DA•DB．



19．已知函数$f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{6})+2\sin^2 x$

（1）求函数 f（x）的最小正周期；

（2）求函数 f（x）的最大值及取得最大值时 x 的取值集合；

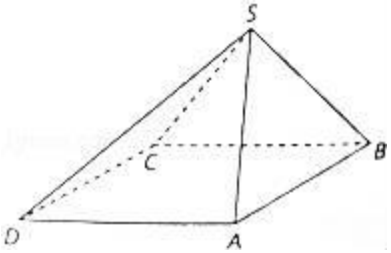
（3）求函数 f（x）的单调递增区间．

20．四棱锥 S－ABCD 中，底面 ABCD 为平行四边形，侧面 SBC⊥面 ABCD，已知∠ABC=45°，AB=2，BC=$2\sqrt{2}$，SB=SC=$\sqrt{3}$．

（1）设平面 SCD 与平面 SAB 的交线为 l，求证：l∥AB；

（2）求证：SA⊥BC；

（3）求直线 SD 与面 SAB 所成角的正弦值．



21．设集合 A={x|x^2－3x+2=0}，B={x|x^2+2（a+1）x+（a^2－5）=0}．

（1）若 $A\cap B=\{2\}$，求实数 a 的值；

（2）若 $A\cup B=A$，求实数 a 的取值范围．

22．已知函数 $f(x)=-x^3+ax-\frac{1}{4}$，$g(x)=e^x-e$（其中 e 为自然对数的底数）

（I）若曲线 $y=f(x)$ 在（0，$f(0)$）处的切线与曲线 $y=g(x)$ 在（0，$g(0)$）处的切线互相垂直，求实数 a 的值．

（Ⅱ）设函数 $h(x)=\begin{cases}f(x), & f(x)\geqslant g(x)\\ g(x), & f(x)<g(x)\end{cases}$，讨论函数 h（x）零点的个数．

23．已知函数 $f(x)=\ln(x+1)-\frac{ax}{x+a}$，a 是常数，且 $a\geq 1$．

（Ⅰ）讨论 f（x）零点的个数；

（Ⅱ）证明：$\frac{2}{2n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{3}{3n+1}$，$n\in N^+$．

24．已知函数 $f(x)=\ln(1+x^2)+ax$．（$a\leqslant 0$）

（1）若 f（x）在 x=0 处取得极值，求 a 的值；

（2）讨论 f（x）的单调性；

（3）证明：$(1+\frac{1}{9})(1+\frac{1}{81})\ldots(1+\frac{1}{3^{2n}})<\sqrt{e}$（$n\in N^*$，e 为自然对数的底数）．

2016-2017学年河北省保定市定州中学高三（上）期末数学试卷（高补班）

参考答案与试题解析

一、选择题

1．在一个不透明的袋子里，有三个大小相等小球（两黄一红），现在分别由3个同学无放回地抽取，如果已知第一名同学没有抽到红球，那么最后一名同学抽到红球的概率为（　　）

A．$\frac{1}{3}$　B．$\frac{2}{3}$　C．$\frac{1}{2}$　D．无法确定

【考点】古典概型及其概率计算公式．

【分析】本题是一个计算概率的问题，由题意知已经知道，由于第一名同学没有抽到红球，问题转化为研究两个人抽取红球的情况，根据无放回抽取的概率意义，可得到最后一名同学抽到红球的概率．

【解答】解：由题意，由于第一名同学没有抽到红球，问题转化为研究两个人抽取红球的情况，

由于无放回的抽样是一个等可能抽样，故此两个同学抽到红球的概率是一样的都是$\frac{1}{2}$．

故选：C．

2．$\sin 2\alpha=\frac{24}{25}$，$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，则$\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha)$的值为（　　）

A．$-\frac{1}{5}$　B．$\frac{1}{5}$　C．$-\frac{7}{5}$　D．$\frac{7}{5}$

【考点】三角函数中的恒等变换应用．

【分析】由二倍角公式化简sin2α，由同角的三角函数恒等式得到（sinα+cosα）^{2}，结合α的范围，得到开平方的值．

【解答】解：∵$\sin 2\alpha=\frac{24}{25}$，$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，

∴sinαcosα=$\frac{12}{25}$,

∵sin^{2}α+cos^{2}α=1

∴（sinα+cosα）^{2}=1+2sinαcosα=$\frac{49}{25}$,

$\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha)=\sqrt{2}$（$\frac{\sqrt{2}}{2}$cosα+$\frac{\sqrt{2}}{2}$sinα）=cosα+sinα=$\frac{7}{5}$.

故选：D

3．某服装加工厂某月生产 A、B、C 三种产品共 4000 件，为了保证产品质量，进行抽样检验，根据分层抽样的结果，企业统计员制作了如下的统计表格：

产品类别	A	B	C
产品数量（件）		2300	
样本容量（件）		230	

由于不小心，表格中 A、C 产品的有关数据已被污染看不清楚，统计员记得 A 产品的样本容量比 C 产品的样本容量多 10，根据以上信息，可得 C 的产品数量是（　　）

A．80　B．800　C．90　D．900

【考点】分层抽样方法．

【分析】在分层抽样中每个个体被抽到的概率相等，由 B 产品知比为$\frac{230}{2300}$，A 产品的样本容量比 C 产品的样本容量多 10，得 C 产品的样本容量为 80，算出 C 产品的样本容量，根据每个个体被抽到的概率，算出产品数．

【解答】解：∵分层抽样是按比抽取，

由 B 产品知比为$\frac{230}{2300}$=$\frac{1}{10}$，共抽取样本容量是 4000×$\frac{1}{10}$=400，

A 产品容量比 C 产品的样本容量多 10，400﹣230﹣2x﹣10=0

∴得 C 产品的样本容量为 80，

∴C 产品共有 80÷$\frac{1}{10}$=800，

故选 B．

4．α是第四象限角，$\cos\alpha=\frac{12}{13}$，则 $\sin\alpha=$（　　）

A．$\frac{5}{13}$　B．$-\frac{5}{13}$　C．$\frac{5}{12}$　D．$-\frac{5}{12}$

【考点】同角三角函数基本关系的运用．

【分析】根据同角的三角函数之间的关系 $\sin^2+\cos^2\alpha=1$，得到余弦的值，又由角在第四象限，确定符号．

【解答】解：∵α是第四象限角，$\cos\alpha=\frac{12}{13}$

∴$\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\frac{5}{13}$，

故选 B．

5．已知变量 x，y 满足约束条件$\begin{cases}x+y\geqslant 1\\3x+y\leqslant 3\\x\geqslant 0\end{cases}$，则目标函数 $z=2x+y$ 的最小值是（　　）

A．4　B．3　C．2　D．1

【考点】简单线性规划．

【分析】作出不等式组对应的平面区域，利用 z 的几何意义，即可得到结论．

【解答】解：作出不等式组对应的平面区域如图：

由 $z=2x+y$ 得 $y=-2x+z$，

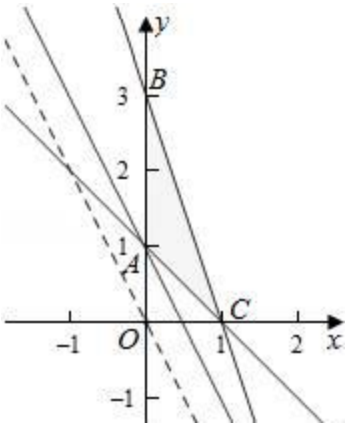
平移直线 $y=-2x+z$，

由图象可知当直线 $y=-2x+z$ 经过点 A（0，1）时，直线的截距最小，

此时 z 最小，

此时 $z=0\times 2+1=1$，

故选：D．



6．设集合 A={x|x²－x－2＞0}，B={x||x|＜3}，则 A∩B=（　　）

A．{x|－3＜x＜－1}　　B．{x|2＜x＜3}

C．{x|－3＜x＜－1 或 2＜x＜3}　D．{x|－3＜x＜－2 或 1＜x＜3}

【考点】交集及其运算．

【分析】化简集合 A、B，根据交集的定义写出 A∩B 即可．

【解答】解：集合 A={x|x²－x－2＞0}={x|x＜－1 或 x＞2}，

B={x||x|＜3}={x|－3＜x＜3}，

则 A∩B={x|－3＜x＜－1 或 2＜x＜3}．

故选：C．

7．若 a、b 是任意实数，且 a＞b，则下列不等式成立的是（　　）

A．$a^2>b^2$　B．$\frac{b}{a}<1$　C．lg（a－b）＞0　D．$(\frac{1}{3})^a<(\frac{1}{3})^b$

【考点】不等关系与不等式．

【分析】由题意 a、b 是任意实数，且 a＞b，可通过举特例与证明的方法对四个选项逐一判断得出正确选项，A，B，C 可通过特例排除，D 可参考函数 y=$(\frac{1}{3})^x$是一个减函数，利用单调性证明出结论．

【解答】解：由题意 a、b 是任意实数，且 a＞b，

由于 0＞a＞b 时，有 $a^2<b^2$ 成立，故 A 不对；

由于当 a=0 时，$\frac{b}{a}<1$无意义，故 B 不对；

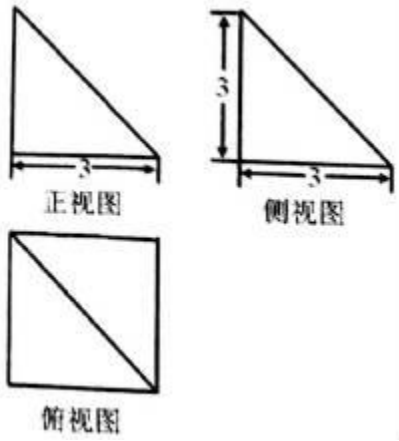
由于 0＜a－b＜1 是存在的，故 lg（a－b）＞0 不一定成立，所以 C 不对；

由于函数 y=$(\frac{1}{3})^x$是一个减函数，当 a＞b 时一定有 $(\frac{1}{3})^a<(\frac{1}{3})^b$成立，故 D 正确．

综上，D 选项是正确选项

故选 D

8．如图为某几何体的三视图，则该几何体的外接球的表面积为（　　）



A．$\frac{27}{2}\pi$　　B．27π　C．$27\sqrt{3}\pi$　　D．$\frac{27\sqrt{3}\pi}{2}$

【考点】由三视图求面积、体积．

【分析】由已知中的三视图，可得该几何体是以俯视图为底面的四棱锥，其外接球等同于棱长为 3 的正方体的外接球，从而求得答案．

【解答】解：由已知中的三视图，可得该几何体是以俯视图为底面的四棱锥，

其底面是边长为 3 的正方形，且高为 3，

其外接球等同于棱长为 3 的正方体的外接球，

所以外接球半径 R 满足：$2R=\sqrt{3^2+3^2+3^2}=\sqrt{27}$，

所以外接球的表面积为 $S=4\pi R^2=27\pi$．

故选：B．

9．已知 A 是△ABC 的内角，则“$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$”是“$\tan A=\sqrt{3}$”的（　　）

A．充分不必要条件 B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件．

【考点】必要条件、充分条件与充要条件的判断．

【分析】根据充分条件和必要条件的定义进行判断即可．

【解答】解：在三角形中，若 sinA=$\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 A=$\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$，

若 tanA=$\sqrt{3}$，则 A=$\frac{\pi}{3}$，

则“sinA=$\frac{\sqrt{3}}{2}$”是“tanA=$\sqrt{3}$”的必要不充分条件，

故选：B

10．“$2^a>2^b$”是“$\log_2 a>\log_2 b$”的（　　）

A．充分不必要条件 B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

【考点】对数函数的单调性与特殊点；指数函数的单调性与特殊点．

【分析】分别解出 $2^a>2^b$，$\log_2 a>\log_2 b$ 中 a，b 的关系，然后根据 a，b 的范围，确定充分条件，还是必要条件．

【解答】解：$2^a>2^b \Rightarrow a>b$，

当 a＜0 或 b＜0 时，不能得到 $\log_2 a>\log_2 b$，

反之由 $\log_2 a>\log_2 b$ 即：a＞b＞0 可得 $2^a>2^b$ 成立．

故选 B．

11．下列各式中，值为$\sqrt{3}$的是（　　）

A．sin15°cos15° B．$\cos^2\frac{\pi}{12}-\sin^2\frac{\pi}{12}$

C．$\frac{1+\tan 15^0}{1-\tan 15^0}$ D．$\sqrt{\frac{1+\cos 30^\circ}{2}}$

【考点】三角函数的化简求值．

【分析】由条件利用二倍角公式、两角和的差三角公式，求出各个选项中式子的值，从而得出结论．

【解答】解：由于 sin15°cos15°=$\frac{1}{2}$sin30°=$\frac{1}{4}$，故排除 A．

由于 $\cos^2\frac{\pi}{12}-\sin^2\frac{\pi}{12}=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故排除 B．

由于 $\frac{1+\tan15°}{1-\tan15°}=\tan60°=\sqrt{3}$，满足条件．

由于 $\sqrt{\frac{1+\cos30°}{2}}=\cos15°=\cos（45°-30°）=\cos45°\cos30°+\sin45°\sin30°=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，

故排除 D，

故选：C．

12．函数函数 f（x）=（x－3）e^x 的单调递增区间是（　　）

A．（－∞，2）　B．（0，3）　C．（1，4）　D．（2，+∞）

【考点】利用导数研究函数的单调性．

【分析】首先对 f（x）=（x－3）e^x 求导，可得 f′（x）=（x－2）e^x，令 f′（x）＞0，解可得答案．

【解答】解：f′（x）=（x－3）′e^x+（x－3）（e^x）′=（x－2）e^x，令 f′（x）＞0，解得 x＞2．

故选：D．

二、填空题

13．在△ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，A=60°，b=2，$S_{△ABC}=2\sqrt{3}$，则 a=__$2\sqrt{3}$__．

【考点】正弦定理．

【分析】利用 $S_{△ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A$ 即可得出 c，由余弦定理即可求 a．

【解答】解：在△ABC 中，∵A=60°，b=2，$S_{△ABC}=2\sqrt{3}$，

∴$2\sqrt{3}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times2\times c\times\frac{\sqrt{3}}{2}$，解得 c=4．

∴由余弦定理可得：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=4+16-2\times2\times4\times\frac{1}{2}=12$，

∴解得：$a=2\sqrt{3}$

故答案为：$2\sqrt{3}$．

14．已知 tanα，tanβ分别是 lg（$6x^2-5x+2$）=0 的两个实根，则 tan（α+β）=__1__．

【考点】两角和与差的正切函数.

【分析】由条件利用一元二次方程根与系数的关系可得 tanα+tanβ和 tanα•tanβ的值，从而求得 tan（α+β）的值.

【解答】解：由题意 lg（$6x^2-5x+2$）=0，

可得 $6x^2-5x+1=0$，tanα，tanβ分别是 lg（$6x^2-5x+2$）=0 的两个实根，

∴tanα+tanβ=$\frac{5}{6}$，tanα•tanβ=$\frac{1}{6}$，

∴tan（α+β）=$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}=\frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{1}{6}}$=1.

故答案为：1.

15．函数 f（x）=a^{x-2015}+2015（a＞0 且 a≠1）过定点 A，则点 A 的坐标为____.

【考点】指数函数的单调性与特殊点.

【分析】利用 a^0=1（a≠0），即可求函数 f（x）的图象所过的定点.

【解答】解：当 x=2015 时，f=a^{x-2015}+2015（a＞0 且 a≠1）过定点 A.

故答案为:.

16．已知向量$\vec{a}$=（x，2），$\vec{b}$=（2，1），$\vec{c}$=（3，x），若$\vec{a}$//$\vec{b}$，则向量$\vec{a}$在向量$\vec{c}$方向上的投影为__4__.

【考点】平面向量共线（平行）的坐标表示.

【分析】先根据 xlde 平行求出 x 的值，再根据投影的定义即可求出.

【解答】解：∵$\vec{a}$=（x，2），$\vec{b}$=（2，1），$\vec{a}$//$\vec{b}$，

∴x=2×2=4，

∴$\vec{c}$=（3，4），

∴$|\vec{c}|$=5，$\vec{a}\cdot\vec{c}$=（4，2）•（3，4）=12+8=20，

∴向量$\vec{a}$在向量$\vec{c}$方向上的投影为$\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{c}|}=\frac{20}{5}$=4，

故答案为：4.

三、解答题

17．已知集合 A={1，3，x^2}，B={x+2，1}．是否存在实数 x，使得 B⊆A？若存在，求出集合 A，B；若不存在，说明理由．

【考点】集合的包含关系判断及应用．

【分析】可假设 B⊆A，这样便有 x+2=3，或 $x+2=x^2$，这样解出 x，从而得出 A，B，判断是否满足 B⊆A 即可．

【解答】解：假设存在实数 x，使 B⊆A，则 x+2=3 或 $x+2=x^2$．

（1）当 x+2=3 时，x=1，此时 A={1，3，1}，不满足集合元素的互异性．故 x≠1．

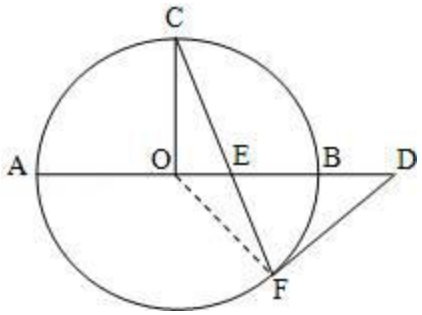
（2）当 $x+2=x^2$ 时，即 $x^2-x-2=0$，故 x=﹣1 或 x=2．

①当 x=﹣1 时，A={1，3，1}，与元素互异性矛盾，故 x≠﹣1．

②当 x=2 时，A={1，3，4}，B={4，1}，显然有 B⊆A．

综上所述，存在 x=2，使 A={1，3，4}，B={4，1}满足 B⊆A．

18．如图，已知 AB 为⊙O 的直径，C，F 为⊙O 上的两点，OC⊥AB，过点 F 作⊙O 的切线 FD 交 AB 的延长线于点 D，连接 CF 交 AB 于点 E．求证：$DE^2=DA\bullet DB$．



【考点】与圆有关的比例线段．

【分析】欲证 $DE^2=DB\bullet DA$，由于由切割线定理得 $DF^2=DB\bullet DA$，故只须证：DF=DE，也就是要证：∠CFD=∠DEF，这个等式利用垂直关系通过互余角的转换即得．

【解答】证明：连接 OF．

因为 DF 切⊙O 于 F，所以∠OFD=90°．

所以∠OFC+∠CFD=90°．

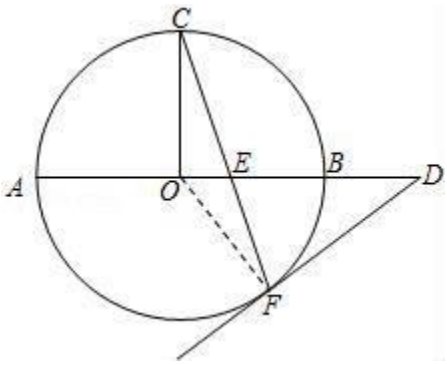
因为 OC=OF，所以∠OCF=∠OFC．

因为 CO⊥AB 于 O，所以∠OCF+∠CEO=90°．

所以∠CFD=∠CEO=∠DEF，所以 DF=DE.

因为 DF 是⊙O 的切线，所以 $DF^2=DB•DA$.

所以 $DE^2=DB•DA$.



19．已知函数$f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{6})+2\sin^2 x$

（1）求函数 f（x）的最小正周期；

（2）求函数 f（x）的最大值及取得最大值时 x 的取值集合；

（3）求函数 f（x）的单调递增区间.

【考点】正弦函数的单调性；两角和与差的正弦函数；三角函数的周期性及其求法；正弦函数的定义域和值域.

【分析】（1）先运用三角函数的两角和与差的正弦公式及二倍角公式将函数化简为 y=Asin（wx+ρ）+b 的形式，根据 T=$\frac{2\pi}{w}$可求出最小正周期；

（2）因为 f（x）取最大值时应该有 sin（2x－$\frac{\pi}{6}$）=1 成立，即 2x－$\frac{\pi}{6}$=2kπ+$\frac{\pi}{2}$，k∈Z，可得答案.

（3）将 2x－$\frac{\pi}{6}$看做一个整体，根据正弦函数的性质可得$2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$，进而求出 x 的范围，得到答案.

【解答】解：（1）∵$f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{6})+2\sin^2 x$

∴f（x）=$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x+(-\cos 2x+1)$

=$(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x)+1$

=$\sin(2x-\frac{\pi}{6})+1$.

∵ $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，即函数 f（x）的最小正周期为π.

（2）当 $2x-\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$

即 $x=k\pi+\frac{\pi}{3}(k\in Z)$ 时，f（x）取最大值 2

因此 f（x）取最大值时 x 的集合是 $\{x|x=k\pi+\frac{\pi}{3},\ k\in Z\}$

（3）f（x）$=\sin(2x-\frac{\pi}{6})+1$.

再由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$，

解得 $k\pi-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{3}(k\in Z)$.

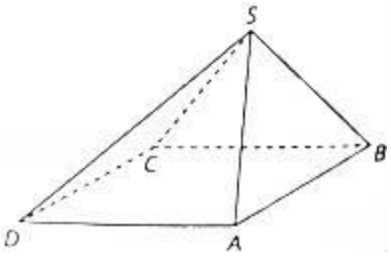
所以 y=f（x）的单调增区间为 $[k\pi-\frac{\pi}{6},\ k\pi+\frac{\pi}{3}](k\in Z)$.

20．四棱锥 S－ABCD 中，底面 ABCD 为平行四边形，侧面 SBC⊥面 ABCD，已知∠ABC=45°，AB=2，BC=$2\sqrt{2}$，SB=SC=$\sqrt{3}$.

（1）设平面 SCD 与平面 SAB 的交线为 l，求证：l∥AB；

（2）求证：SA⊥BC；

（3）求直线 SD 与面 SAB 所成角的正弦值.



【考点】直线与平面所成的角；棱锥的结构特征.

【分析】（1）由 AB∥CD 得 AB∥平面 PCD，由线面平行的性质得出 AB∥l；

（2）取 BC 中点 O，连接 OS，OA，利用余弦定理计算 OA 得出 OA⊥BC，又 OS⊥BC 得出 BC⊥平面 SOA，故而 BC⊥SA；

（3）以 O 为原点建立坐标系，求出 $\overrightarrow{SD}$ 和平面 SAB 的法向量 $\vec{n}$，则直线 SD 与面 SAB 所成角的正弦值为 $|\cos<\overrightarrow{SD},\ \vec{n}>|$.

【解答】证明：（1）∵底面 ABCD 为平行四边形，

∴AB∥CD，∵AB⊆平面 SCD，CD⊂平面 SCD，

∴AB∥平面 SCD，又 AB⊂平面 SAB，平面 SCD∩平面 SAB=l，

∴l∥AB．

（2）取 BC 中点 O，连接 OS，OA．

∵OB=$\frac{1}{2}$BC=$\sqrt{2}$，AB=2，∠ABC=45°，

∴OA=$\sqrt{OB^2+AB^2-2OB\cdot AB\cdot\cos45°}$=$\sqrt{2}$．

∴$OA^2+OB^2=AB^2$，∴OA⊥BC．

∵SB=SC，O 是 BC 的中点，∴OS⊥BC，

又 SO⊂平面 SOA，OA⊂平面 SOA，SO∩OA=O，

∴BC⊥平面 SOA，∵SA⊂平面 SOA，

∴BC⊥SA．

（3）∵SB=SC，O 是 BC 中点，∴SO⊥BC．

∵侧面 SBC⊥面 ABCD，侧面 SBC∩面 ABCD=BC，

∴SO⊥平面 ABCD．

以 O 为原点，以 OA，OB，OS 为坐标轴建立空间直角坐标系 O﹣xyz，如图所示，

则 A（$\sqrt{2}$，0，0），B（0，$\sqrt{2}$，0），S（0，0，1），D（$\sqrt{2}$，﹣$2\sqrt{2}$，0），

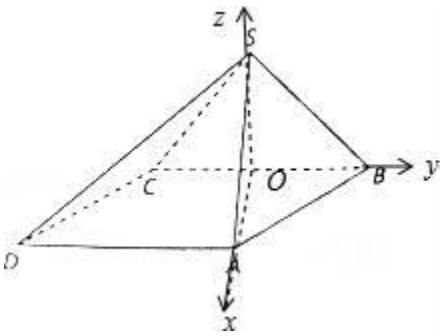
∴$\overrightarrow{SD}$=（$\sqrt{2}$，﹣$2\sqrt{2}$，﹣1），$\overrightarrow{SA}$=（$\sqrt{2}$，0，﹣1），$\overrightarrow{BA}$=（$\sqrt{2}$，﹣$\sqrt{2}$，0）．

设平面 SAB 法向量为$\vec{n}$=（x，y，z），则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{SA}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BA}=0\end{cases}$，

∴$\begin{cases}\sqrt{2}x-z=0\\ \sqrt{2}x-\sqrt{2}y=0\end{cases}$．令 x=1，则 y=1，z=$\sqrt{2}$，∴$\vec{n}$=（1，1，$\sqrt{2}$）．

∴cos<$\vec{n}$，$\overrightarrow{SD}$>=$\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{SD}}{|\vec{n}||\overrightarrow{SD}|}$=$\frac{\sqrt{2}-2\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2\sqrt{11}}$=﹣$\frac{\sqrt{22}}{11}$．

∴直线 SD 与面 SAB 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{22}}{11}$．



21．设集合 A={x|x^2－3x+2=0}，B={x|x^2+2（a+1）x+（a^2－5）=0}．

（1）若 A∩B={2}，求实数 a 的值；

（2）若 A∪B=A，求实数 a 的取值范围．

【考点】集合的包含关系判断及应用；并集及其运算；交集及其运算．

【分析】（1）先解出集合 A，根据 2 是两个集合的公共元素可知 2∈B，建立关于 a 的等式关系，求出 a 后进行验证即可．

（2）一般 A∪B=A 转化成 B⊆A 来解决，集合 A 两个元素故可考虑对集合 B 的元素个数进行讨论求解．

【解答】解：由 x^2－3x+2=0 得 x=1 或 x=2，故集合 A={1，2}

（1）∵A∩B={2}，∴2∈B，代入 B 中的方程，

得 a^2+4a+3=0⇒a=－1 或 a=－3；

当 a=－1 时，B={x|x^2－4=0}={－2，2}，满足条件；

当 a=－3 时，B={x|x^2－4x+4=0}={2}，满足条件；

综上，a 的值为－1 或－3；

（2）对于集合 B，

△=4（a+1）^{2}－4（a^2－5）=8（a+3）．

∵A∪B=A，∴B⊆A，

①当△＜0，即 a＜－3 时，B=∅满足条件；

②当△=0，即 a=－3 时，B={2}，满足条件；

③当△＞0，即 a＞－3 时，B=A={1，2}才能满足条件，

则由根与系数的关系得

$\begin{cases}1+2=-2(a+1)\\1\times 2=a^2-5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-\frac{5}{2}\\a^2=7\end{cases}$矛盾；

综上，a 的取值范围是 a≤﹣3．

22．已知函数 f（x）=﹣x^3+ax﹣$\frac{1}{4}$，g（x）=e^x﹣e（其中 e 为自然对数的底数）

（I）若曲线 y=f（x）在（0，f（0））处的切线与曲线 y=g（x）在（0，g（0））处的切线互相垂直，求实数 a 的值．

（Ⅱ）设函数 h（x）=$\begin{cases}f(x),\ f(x)\geqslant g(x)\\g(x),\ f(x)<g(x)\end{cases}$，讨论函数 h（x）零点的个数．

【考点】利用导数研究函数的单调性；利用导数研究曲线上某点切线方程．

【分析】（Ⅰ）分别求出两个函数的导函数，求得它们在 x=0 处的导数值，由导数值乘积等于﹣1 求得 a 值；

（Ⅱ）函数 g（x）=e^x﹣e 在实数集上为单调增函数，且仅在 x=1 处有一个零点，且 x＜1 时，g（x）＜0，求出 f（x）的导函数，当 a≤0 时，由导数 f（x）在 x≤0 时必有一个零点，此时 y=h（x）有两个零点；然后分类讨论判断当 a＞0 时 f（x）的极值点的情况得答案．

【解答】解：（Ⅰ）由已知得 f′（x）=﹣3x^2+a，g′（x）=e^x，

则 f′（0）=a，g′（0）=1，则 a=﹣1；

（Ⅱ）函数 g（x）=e^x﹣e 在实数集上为单调增函数，

且仅在 x=1 处有一个零点，且 x＜1 时，g（x）＜0，

又 f′（x）=﹣3x^2+a，

①当 a≤0 时，f′（x）≤0，f（x）在实数集上单调递减，且过点（0，﹣$\frac{1}{4}$），f（﹣1）=$\frac{3}{4}-a>0$，

即 f（x）在 x≤0 时必有一个零点，此时 y=h（x）有两个零点；

②当 a＞0 时，令 f′（x）=0，得两根 $x_1=-\sqrt{\frac{a}{3}}<0$，$x_2=\sqrt{\frac{a}{3}}>0$，

则 $-\sqrt{\frac{a}{3}}$是函数 f（x）的一个极小值点，$\sqrt{\frac{a}{3}}$是 f（x）的一个极大值点.

而 $f(-\sqrt{\frac{a}{3}})=-(-\sqrt{\frac{a}{3}})^3+a(-\sqrt{\frac{a}{3}})-\frac{1}{4}=-\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}-\frac{1}{4}<0$,

现在讨论极大值的情况：

$f(\sqrt{\frac{a}{3}})=-(\sqrt{\frac{a}{3}})^3+a\sqrt{\frac{a}{3}}-\frac{1}{4}=\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}-\frac{1}{4}$

当 $f(\sqrt{\frac{a}{3}})<0$，即 $a<\frac{3}{4}$时，函数 f（x）在（0，+∞）恒小于 0，此时 y=h（x）有两个零点；

当 $f(\sqrt{\frac{a}{3}})=0$，即 $a=\frac{3}{4}$时，函数 f（x）在（0，+∞）上有一解 $x_0=\sqrt{\frac{a}{3}}=\frac{1}{2}$，此时 y=h（x）有三个零点；

当 $f(\sqrt{\frac{a}{3}})>0$，即 $a>\frac{3}{4}$时，函数 f（x）在（0，+∞）上有两个解，一个小于$\sqrt{\frac{a}{3}}$，一个大于$\sqrt{\frac{a}{3}}$.

若 $f（1）=-1+a-\frac{1}{4}<0$，即 $a<\frac{5}{4}$时，$f(\sqrt{\frac{a}{3}})<1$，此时 y=h（x）有四个零点；

若 $f（1）=-1+a-\frac{1}{4}=0$，即 $a=\frac{5}{4}$时，$f(\sqrt{\frac{a}{3}})=1$，此时 y=h（x）有三个零点；

若 $f（1）=-1+a-\frac{1}{4}>0$，即 $a>\frac{5}{4}$时，$f(\sqrt{\frac{a}{3}})>1$，此时 y=h（x）有四个零点.

综上所述，①$a<\frac{3}{4}$或 $a>\frac{5}{4}$时，y=h（x）有两个零点；

②$a=\frac{3}{4}$或 $a=\frac{5}{4}$时，y=h（x）有三个零点；

③$\frac{3}{4}<a<\frac{5}{4}$时，y=h（x）有四个零点.

23．已知函数 $f（x）=\ln（x+1）-\frac{ax}{x+a}$，a 是常数，且 $a\geq 1$.

（Ⅰ）讨论 f（x）零点的个数；

（Ⅱ）证明：$\frac{2}{2n+1}<\ln（1+\frac{1}{n}）<\frac{3}{3n+1}$，$n\in N^+$.

【考点】利用导数研究函数的单调性；利用导数求闭区间上函数的最值.

【分析】（Ⅰ）利用导数判断函数的单调性及极值最值，通过对 a 分类讨论求得函数零点的个数，

（Ⅱ）取 a=2 或 a=$\frac{3}{2}$，由（1）知函数单调性，即可证明．

【解答】证明：（Ⅰ）$f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{a^2}{(x+a)^2}=\frac{x(x-a^2+2a)}{(x+1)(x+a)^2}$，

解 f′（x）=0 得 x=0，或 $x=a^2-2a$

①a=1 时，$f'(x)=\frac{x}{(x+1)^2}$，若 x∈（－1，0），f′（x）＜0，f（x）＞f（0）=0，

若 x∈（0，+∞），f′（x）＞0，f（x）＞f（0）=0．f（x）有一个零点，

②1＜a＜2 时，$-1<a^2-2a<0$，

x	（－1，a^2-2a）	a^2-2a	（a^2-2a，0）	0	（0，+∞）
f′（x）	+	0	-	0	+
f（x）	↗		↘		↗

由上表可知，f（x）在区间（a^2-2a，+∞）有一个零点 x=0，

f（a^2-2a）＞f（0）=0，又 $-\frac{ax}{x+a}=\frac{a^2}{x+a}-a<\frac{a^2}{a-1}-a=\frac{a}{a-1}$，

任取 $t\in(-1,\ e^{\frac{a}{1-a}}-1)$，$f(t)<\frac{a}{1-a}+\frac{a}{a-1}=0$，

f（x）在区间（t，a^2-2a）有一个零点，从而 f（x）有两个零点，

③a=2 时，$f'(x)=\frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}>0$，f（x）在（－1，+∞）上单调递增，有一个零点 x=0，

④a＞2 时，$a^2-2a>0$，

x	（－1，0）	0	（0，a^2-2a）	a^2-2a	（a^2-2a，+∞）
f′（x）	+	0	-	0	+
f（x）	↗		↘		↗

由上表可知，f（x）在区间（－1，a^2-2a）有一个零点 x=0，在区间（a^2-2a，+∞）有一个零点，从而 f（x）有两个零点，

（Ⅱ）证明：取 a=2，由（1）知 $f(x)=\ln(x+1)-\frac{2x}{x+2}$ 在（－1，+∞）上单调递增，

取 $x=\frac{1}{n}$（n∈N*），则 $f(\frac{1}{n})>f(0)=0$，化简得 $\ln(1+\frac{1}{n})>\frac{2}{2n+1}$，

取 $a=\frac{3}{2}$，由（1）知 $f(x)=\ln(x+1)-\frac{3x}{2x+3}$ 在区间 $(-\frac{3}{4},\ 0)$ 上单调递减，

取 $x=-\frac{1}{n+1}\in(-\frac{3}{4},\ 0)$（$n\in N^*$），由 $f(x)>f(0)$ 得 $\ln(1-\frac{1}{n+1})>\frac{-\frac{3}{n+1}}{2(-\frac{1}{n+1})+3}$，

即 $\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{3}{3n+1}$（$n\in N^*$），

综上，$\frac{2}{2n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{3}{3n+1}$，$n\in N^*$

24．已知函数 f（x）=ln（1+x^2）+ax．（a≤0）

（1）若 f（x）在 x=0 处取得极值，求 a 的值；

（2）讨论 f（x）的单调性；

（3）证明：（$1+\frac{1}{9}$）（$1+\frac{1}{81}$）…（$1+\frac{1}{3^{2n}}$）<$\sqrt{e}$（$n\in N^*$，e 为自然对数的底数）．

【考点】利用导数研究函数的极值；利用导数研究函数的单调性；不等式的证明．

【分析】（1）求出 f′（x），因为 f（x）在 x=0 时取得极值，所以 f'（0）=0，代入求出 a 即可；

（2）分三种情况：a=0；a≤－1；－1<a<0，令 f′（x）>0 得到函数的递增区间；令 f′（x）<0 得到函数的递减区间即可；（3）由（2）知当 a=－1 时函数为减函数，所以得到 ln（1+x^2）<x，利用这个结论根据对数的运算法则化简不等式的左边得证即可．

【解答】解：（1）∵$f'(x)=\frac{2x}{1+x^2}+a$，∵x=0 使 f（x）的一个极值点，则 f'（0）=0，

∴a=0，验证知 a=0 符合条件．

（2）∵$f'(x)=\frac{2x}{1+x^2}+a=\frac{ax^2+2x+a}{1+x^2}$

①若 a=0 时，∴f（x）在（0，+∞）单调递增，在（－∞，0）单调递减；

②若 $\begin{cases}a<0\\ \triangle\leq 0\end{cases}$ 得，当 a≤－1 时，f'（x）≤0 对 x∈R 恒成立，

∴f（x）在 R 上单调递减．

③若－1<a<0 时，由 f'（x）>0 得 $ax^2+2x+a>0$

$\therefore \frac{-1+\sqrt{1-a^2}}{a}<x<\frac{-1-\sqrt{1-a^2}}{a}$

再令 f'（x）＜0，可得 $x>\frac{-1-\sqrt{1-a^2}}{a}$ 或 $x<\frac{-1+\sqrt{1-a^2}}{a}$

$\therefore f(x)$ 在 $(\frac{-1+\sqrt{1-a^2}}{a}, \frac{-1-\sqrt{1-a^2}}{a})$ 上单调递增，

在 $(-\infty, \frac{-1+\sqrt{1-a^2}}{a})$ 和 $(\frac{-1-\sqrt{1-a^2}}{a}, +\infty)$ 上单调递减

综上所述，若 a≤﹣1 时，f（x）在（﹣∞，+∞）上单调递减；

若 ﹣1＜a＜0 时，$f(x)$ 在 $(\frac{-1+\sqrt{1-a^2}}{a}, \frac{-1-\sqrt{1-a^2}}{a})$ 上单调递增

$(-\infty, \frac{-1+\sqrt{1-a^2}}{a})$ 和 $(\frac{-1-\sqrt{1-a^2}}{a}, +\infty)$ 上单调递减；

若 a=0 时，f（x）在（0，+∞）单调递增，在（﹣∞，0）单调递减.

（3）由（2）知，当 a=﹣1 时，f（x）在（﹣∞，+∞）单调递减

当 x∈（0，+∞）时，由 f（x）＜f（0）=0

$\therefore \ln(1+x^2)<x$，$\therefore \ln[(1+\frac{1}{9})(1+\frac{1}{81})\ldots(1+\frac{1}{3^{2n}})]=\ln(1+\frac{1}{9})+\ln(1+\frac{1}{81})+\ldots+\ln(1+\frac{1}{3^{2n}})$

$<\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^n}=\frac{\frac{1}{3}(1-\frac{1}{3^n})}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^n})<\frac{1}{2}$，$\therefore (1+\frac{1}{9})(1+\frac{1}{81})\ldots(1+\frac{1}{3^{2n}})$

$<e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$