

第二高级中学

2017-2018 学年上期高二理科数学周练七

一.选择题:

1. 公差不为零的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 a_4 是 a_3 与 a_7 的等比中项, $S_8 = 32$, 则 S_{10} 等于 ()

- A. 18 B. 24 C. 60 D. 90

2. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $B = 60^\circ, C = 45^\circ, BC = 8, AD \perp BC$ 于 D , 则 AD 长为 ()

- A. $4(\sqrt{3}-1)$ B. $4(\sqrt{3}+1)$ C. $4(3+\sqrt{3})$ D. $4(3-\sqrt{3})$

3. 若椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 过抛物线 $y^2 = 8x$ 的焦点, 且与双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 有相同的焦点, 则该椭圆的方程是 ()

- A. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ B. $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ C. $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$ D. $x^2 + \frac{y^2}{3} = 1$

4. 下列命题:

①“在三角形 ABC 中, 若 $\sin A > \sin B$, 则 $A > B$ ”的逆命题是真命题;

②命题 $p: x \neq 2$ 或 $y \neq 3$, 命题 $q: x + y \neq 5$, 则 p 是 q 的必要不充分条件;

③“ $\forall x \in R, x^3 - x^2 + 1 \leq 0$ ”的否定是“ $\forall x \in R, x^3 - x^2 + 1 > 0$ ”;

④“若 $a > b$, 则 $2^a > 2^b - 1$ ”的否命题为“若 $a \leq b$, 则 $2^a \leq 2^b - 1$ ”;

其中正确的个数是 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

5. 已知向量 $\vec{a} = (2, -1, 2), \vec{b} = (2, 2, 1)$, 则以 $\vec{a}, \vec{b}$ 为邻边的平行四边形的面积为 ()

- A. $\frac{\sqrt{65}}{2}$ B. $\sqrt{65}$ C. 4 D. 8

6. 已知直线 $y = -x + m$ 是曲线 $y = x^2 - 3 \ln x$ 的一条切线, 则 m 的值为 ()

- A. 0 B. 2 C. 1 D. 3

7. 等比数列 $\{a_n\}$ 共有奇数项, 所有奇数项和 $S_{\text{奇}} = 255$, 所有偶数项和 $S_{\text{偶}} = -126$, 末项是 192, 则首项 $a_1 =$ ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

8. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $\sqrt{3}(a \cos B + b \cos A) = 2c \sin C$, $a + b = 4$, 且 $\triangle ABC$ 的面积的最大值为 $\sqrt{3}$, 则 $\triangle ABC$ 的形状为 ()

- A. 锐角三角形 B. 直角三角形 C. 等腰三角形 D. 正三角形

9. 若 x, y 满足 $\begin{cases} x+y-2 \geq 0 \\ kx-y+2 \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$, 且 $z=y-x$ 的最小值为 -4 , 则 k 的值为 ()

- A. 2 B. -2 C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

10. 若正数 x, y 满足 $x+3y=5xy$, 则 $3x+4y$ 的最小值是 ()

- A. $\frac{24}{5}$ B. $\frac{28}{5}$ C. 6 D. 5

11. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一条渐近线与圆 $(x-3)^2 + y^2 = 9$ 相交于 A, B 两点, AB 的长为 2, 则该双曲线的离心率为 ()

- A. 8 B. $2\sqrt{2}$ C. 3 D. 1.5

12. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$, 则 a_{k+1} 等于 ()

- A. $a_k + \frac{1}{2k+1}$ B. $a_k + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{2k+4}$ C. $a_k + \frac{1}{2k+2}$ D. $a_k + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}$

二.填空题:

13. 观察下面的算式: $1^2 = \frac{1}{6} \times 1 \times 2 \times 3$, $1^2 + 2^2 = \frac{1}{6} \times 2 \times 3 \times 5$, $1^2 + 2^2 + 3^2 = \frac{1}{6} \times 3 \times 4 \times 7$, 则 $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ (其中 $n \in N^*$).

14. 已知抛物线 $C: y^2 = 8x$ 与点 $M(-2, 2)$, 过 C 的焦点, 且斜率为 k 的直线与 C 交于 A, B 两点, 若 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

15. 已知 $f(x) = x^2 + 2xf'(1)$, 则 $f'(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

16. 已知在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面是边长为 2 的正方形, 高为 4, 则点 A_1 到截面 AB_1D_1 的距离是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三.解答题:

17. 设命题 p : 实数 x 满足 $x^2 - 4ax + 3a^2 < 0$, 其中 $a > 0$; 命题 q : 实数 x 满足 $x^2 - 5x + 6 \leq 0$. (1) 若 $a = 1$, 且 $p \wedge q$ 为真, 求实数 x 的取值范围; (2) 若 p 是 q 成立的必要不充分条件, 求实数 a 的取值范围.

18. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 对应的边分别是 a, b, c , 已知 $\cos 2A - 3\cos(B+C) = 1$.

(1) 求角 A 的大小; (2) 若 $\triangle ABC$ 的面积 $S = 5\sqrt{3}$, $b = 5$, 求 $\sin B \sin C$ 的值.

19. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 2, 前 n 项和为 S_n , 且 S_1, S_2, S_4 成等比数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式; (2) 令 $b_n = (-1)^{n-1} \frac{4n}{a_n a_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

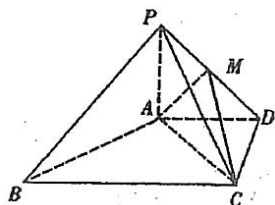
20. 某建筑工地要建造一批简易房, 供群众临时居住, 房形为长方体, 高 2.5 米, 前后墙用 2.5 米高的彩色钢板, 两侧用 2.5 米高的复合钢板, 两种钢板的价格都用长度来计算 (即钢板的高均为 2.5 米, 用长度乘以单价就是这块钢板的价格), 每米单价: 彩色钢板为 450 元, 复合钢板为 200 元, 房顶用其他材料建造, 每平方米材料费为 200 元, 每套房材料费控制在 32000 元以内.

(1) 设房前面墙的长为 x , 两侧墙的长为 y , 一套简易房所用材料费为 p , 试用 x, y 表示 p . (2) 一套简易房面积 S 的最大值是多少? 当 S 最大时, 前面墙的长度是多少?

21. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \parallel BC$, $PB \perp AC$, $AD \perp CD$, 且 $AD = CD = 2\sqrt{2}$, $PA = 2$, 点 M 在线段 PD 上.

(1) 求证: $AB \perp$ 平面 PAC ;

(2) 若二面角 $M-AC-D$ 的大小为 45° , 试确定点 M 的位置.



22. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点到直线 $l: x = \frac{a^2}{c}$ 的距离为 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$, 离心率 $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$, A, B 是椭圆上的两动点, 动点 P 满足 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB}$, (其中 λ 为常数).

(1) 求椭圆标准方程;

(2) 当 $\lambda = 1$ 且直线 AB 与 OP 斜率均存在时, 求 $|k_{AB}| + |k_{OP}|$ 的最小值;

(3) 若 G 是线段 AB 的中点, 且 $k_{OA} \cdot k_{OB} = k_{OG} \cdot k_{AB}$, 问是否存在常数 λ 和平面内两定点 M, N , 使得动

点 P 满足 $PM + PN = 18$ ，若存在，求出 λ 的值和定点 M, N ；若不存在，请说明理由。

答案：

1-5 CDACB 6-10 BCCDD 11-12 CD

$$13. \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad 14. 2 \quad 15. -4 \quad 16. \frac{4}{3}$$

$$17. (1) 2 \leq x \leq 3 \quad (2) 1 < a < 2$$

$$18. (1) 60^\circ \quad (2) \frac{5}{7}$$

$$19. (1) a_n = 2n - 1 \quad (2) T_n = \begin{cases} \frac{2n+2}{2n+1} (n=2k-1, k \in \mathbb{Z}) \\ \frac{2n}{2n+1} (n=2k, k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$20. (1) p = 900x + 400y + 200xy \quad (2) S \text{ 最大为 } 100 \text{ 平方米, 此时前墙的长度为 } \frac{20}{3} \text{ 米}$$

$$21. (1) \text{略} \quad (2) M \text{ 为 } PD \text{ 的中点}$$

$$22. (1) \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad (2) \frac{4}{3}$$

$$(3) \text{存在适合题意的 } \lambda \text{ 值, } \lambda = \pm 2\sqrt{2}, \text{ 此时点 } M(3\sqrt{5}, 0), N(-3\sqrt{5}, 0)$$