题型练4　大题专项(二)
数列的通项、求和问题

1.设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,满足$(1-q)S_n+qa_n=1$,且$q(q-1)\neq0$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式;

(2)若S_3,S_9,S_6成等差数列,求证:a_2,a_8,a_5成等差数列.

2.已知等差数列$\{a_n\}$的首项$a_1=1$,公差$d=1$,前n项和为$S_n,b_n=$.

(1)求数列$\{b_n\}$的通项公式;

(2)设数列$\{b_n\}$前n项和为T_n,求T_n.

3.(2017 江苏,19)对于给定的正整数 k,若数列$\{a_n\}$满足:$a_{n-k}+a_{n-k+1}+\cdots+a_{n-1}+a_{n+1}+\cdots+a_{n+k-1}+a_{n+k}=2ka_n$对任意正整数 $n(n>k)$总成立,则称数列$\{a_n\}$是“$P(k)$数列”.

(1)证明:等差数列$\{a_n\}$是“$P(3)$数列”;

(2)若数列$\{a_n\}$既是“$P(2)$数列”,又是“$P(3)$数列”,证明:$\{a_n\}$是等差数列.

4.已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,公比为 q 的等比数列$\{b_n\}$的首项是,且 $a_1+2q=3,a_2+4b_2=6,S_5=40$.

(1)求数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的通项公式 a_n,b_n;

(2)求数列的前 n 项和 T_n.

5.已知函数 $f(x)=$,数列$\{a_n\}$满足:$2a_{n+1}-2a_n+a_{n+1}a_n=0$,且 $a_na_{n+1}\neq 0$.在数列$\{b_n\}$中,$b_1=f(0)$,且 $b_n=f(a_n-1)$.

(1)求证:数列是等差数列;

(2)求数列$\{|b_n|\}$的前 n 项和 T_n.

6.记 $U=\{1,2,\cdots,100\}$.对数列$\{a_n\}(n\in\mathbf{N}^*)$和 U 的子集 T,若 $T=\varnothing$,定义 $S_T=0$;若 $T=\{t_1,t_2,\cdots,t_k\}$,定义 $S_T=+\cdots+$.例如:$T=\{1,3,66\}$时,$S_T=a_1+a_3+a_{66}$.现设$\{a_n\}(n\in\mathbf{N}^*)$是公比为 3 的等比数列,且当 $T=\{2,4\}$时,$S_T=30$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)对任意正整数 $k(1\leqslant k\leqslant 100)$,若 $T\subseteq\{1,2,\cdots,k\}$,求证:$S_T<a_{k+1}$;

(3)设 $C\subseteq U,D\subseteq U,S_C\geqslant S_D$,求证:$S_C+S_{C\cap D}\geqslant 2S_D$.

##

题型练 4　大题专项(二)

数列的通项、求和问题

1.**解** (1)当 $n=1$ 时,由$(1-q)S_1+qa_1=1$,$a_1=1$.

当 $n\geqslant 2$ 时,由$(1-q)S_n+qa_n=1$,得$(1-q)S_{n-1}+qa_{n-1}=1$,两式相减,得 $a_n=qa_{n-1}$.

又 $q(q-1)\neq 0$,所以$\{a_n\}$是以 1 为首项,q 为公比的等比数列,故 $a_n=q^{n-1}$.

(2)由(1)可知 $S_n=$,又 $S_3+S_6=2S_9$,

所以,

化简,得 $a_3+a_6=2a_9$,两边同除以 q,得 $a_2+a_5=2a_8$.故 a_2,a_8,a_5 成等差数列.

2.**解** (1)∵在等差数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$,公差 $d=1$,

∴$S_n=na_1+d=$,∴$b_n=$.

(2)$b_n==2$,∴$T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=2+\cdots+=2+\cdots+=2$.故 $T_n=$.

3.**证明** (1)因为$\{a_n\}$是等差数列,设其公差为 d,

则 $a_n=a_1+(n-1)d$,

从而,当 $n\geqslant4$ 时,$a_{n-k}+a_{n+k}=a_1+(n-k-1)d+a_1+(n+k-1)d=2a_1+2(n-1)d=2a_n,k=1,2,3$,

所以 $a_{n-3}+a_{n-2}+a_{n-1}+a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}=6a_n$,

因此等差数列$\{a_n\}$是“$P(3)$数列”.

(2)数列$\{a_n\}$既是“$P(2)$数列”,又是“$P(3)$数列”,因此,

当 $n\geqslant3$ 时,$a_{n-2}+a_{n-1}+a_{n+1}+a_{n+2}=4a_n$,①

当 $n\geqslant4$ 时,$a_{n-3}+a_{n-2}+a_{n-1}+a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}=6a_n$.②

由①知,$a_{n-3}+a_{n-2}=4a_{n-1}-(a_n+a_{n+1})$,③

$a_{n+2}+a_{n+3}=4a_{n+1}-(a_{n-1}+a_n)$.④

将③④代入②,得 $a_{n-1}+a_{n+1}=2a_n$,其中 $n\geqslant4$,

所以 $a_3,a_4,a_5,\cdots$是等差数列,设其公差为 d'.

在①中,取 $n=4$,则 $a_2+a_3+a_5+a_6=4a_4$,

所以 $a_2=a_3-d'$,

在①中,取 $n=3$,则 $a_1+a_2+a_4+a_5=4a_3$,

所以 $a_1=a_3-2d'$,

所以数列$\{a_n\}$是等差数列.

4.**解** (1)设$\{a_n\}$公差为 d,由题意得解得故 $a_n=3n-1,b_n=$.

(2) $\because$+2^{2n+1},

$\therefore T_n=+\cdots+(2^{2n+3}-8)=$.

5.(1)**证明** $\because 2a_{n+1}-2a_n+a_{n+1}a_n=0$,$\therefore$,

故数列是以为公差的等差数列.

(2)**解** $\because b_1=f(0)=5$,

$\therefore$=5,$7a_1-2=5a_1$,

$\therefore a_1=1$,=1+$(n-1)\cdot$,

$\therefore a_n=$,b_n==$7-(n+1)=6-n$.

当 $n\leqslant6$ 时,$T_n=(5+6-n)=$;

当 $n\geqslant7$ 时,$T_n=15+(1+n-6)=$.故 $T_n=$

6.(1)**解** 由已知得 $a_n=a_1\cdot3^{n-1},n\in\mathbf{N}^*$.

于是当 $T=\{2,4\}$时,$S_T=a_2+a_4=3a_1+27a_1=30a_1$.

又 $S_T=30$,故 $30a_1=30$,即 $a_1=1$.

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=3^{n-1},n\in\mathbf{N}^*$.

(2)**证明** 因为 $T\subseteq\{1,2,\cdots,k\},a_n=3^{n-1}>0,n\in\mathbf{N}^*$,

所以 $S_T\leqslant a_1+a_2+\cdots+a_k=1+3+\cdots+3^{k-1}=(3^k-1)<3^k$.

因此,$S_T<a_{k+1}$.

(3)**证明** 下面分三种情况证明.

①若 D 是 C 的子集,则 $S_C+S_{C\cap D}=S_C+S_D\geqslant S_D+S_D=2S_D$.

②若 C 是 D 的子集,则 $S_C+S_{C\cap D}=S_C+S_C=2S_C\geqslant2S_D$.

③若 D 不是 C 的子集,且 C 不是 D 的子集.

令 $E=C\cap\complement_UD,F=D\cap\complement_UC$,则 $E\neq\varnothing,F\neq\varnothing,E\cap F=\varnothing$.

于是 $S_C=S_E+S_{C\cap D},S_D=S_F+S_{C\cap D}$,进而由 $S_C\geqslant S_D$ 得 $S_E\geqslant S_F$.

设 k 为 E 中的最大数,l 为 F 中的最大数,则 $k\geqslant1,l\geqslant1,k\neq l$.

由(2)知,$S_E<a_{k+1}$.于是 $3^{l-1}=a_l\leqslant S_F\leqslant S_E<a_{k+1}=3^k$,所以 $l-1<k$,即 $l\leqslant k$.

又 $k\neq l$,故 $l\leqslant k-1$.

从而 $S_F \leqslant a_1+a_2+\cdots+a_l=1+3+\cdots+3^{l-1}=$,

故 $S_E \geqslant 2S_F+1$,

所以 $S_C-S_{C\cap D} \geqslant 2(S_D-S_{C\cap D})+1$,

即 $S_C+S_{C\cap D} \geqslant 2S_D+1$.

综上①②③得,$S_C+S_{C\cap D} \geqslant 2S_D$.