

2016-2017 学年高一（上）质检数学试卷

一、选择题（共 12*5=60 分，请将正确选项填写在题后答题表格中）

1. 设全集 $U=\{0, 1, 2, 3\}$ ，集合 $A=\{0, 1, 2\}$ ，集合 $B=\{2, 3\}$ ，则 $(C_U A) \cup B =$ ()

A. \emptyset B. $\{1, 2, 3\}$ C. $\{0, 1, 2, 3\}$ D. $\{2, 3\}$

2. 设集合 $A=\{x|1 < x \leq 2\}$ ， $B=\{x|x < a\}$ ，若 $A \subseteq B$ ，则 a 的取值范围是 ()

A. $\{a|a \geq 1\}$ B. $\{a|a \leq 1\}$ C. $\{a|a \geq 2\}$ D. $\{a|a > 2\}$

3. 若全集 $U=\{0, 1, 2, 3\}$ 且 $C_U A=\{2\}$ ，则集合 A 的真子集共有 ()

A. 3 个 B. 5 个 C. 7 个 D. 8 个

4. $A=\{x|x^2+x-6=0\}$ ， $B=\{x|mx+1=0\}$ 且 $A \cup B=A$ ，则 m 的取值范围 ()

A. $\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\}$ B. $\{0, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\}$ C. $\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\}$ D. $\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\}$

5. 已知函数 $y=f(x+1)$ 定义域是 $[-2, 3]$ ，则 $y=f(2x-1)$ 的定义域 ()

A. $[0, \frac{5}{2}]$ B. $[-1, 4]$ C. $[-5, 5]$ D. $[-3, 7]$

6. 下列四组中的 $f(x)$ ， $g(x)$ ，表示同一个函数的是 ()

A. $f(x)=1$ ， $g(x)=x^0$ B. $f(x)=x-1$ ， $g(x)=\frac{x^2}{x}-1$

C. $f(x)=x^2$ ， $g(x)=(\sqrt{x})^4$ D. $f(x)=x^3$ ， $g(x)=\sqrt[3]{x^9}$

7. 函数 $y=x^2-4x+1$ ， $x \in [2, 5]$ 的值域是 ()

A. $[1, 6]$ B. $[-3, 1]$ C. $[-3, 6]$ D. $[-3, +\infty)$

8. 函数 $f(x)=\frac{1}{x}-x$ 的图象关于 ()

A. y 轴对称 B. 直线 $y=-x$ 对称 C. 坐标原点对称 D. 直线 $y=x$ 对称

9. 已知 $f(x)=ax^3+bx-4$ ，其中 a, b 为常数，若 $f(-2)=2$ ，则 $f(2)$ 的值等于 ()

A. -2 B. -4 C. -6 D. -10

10. 下列四个函数中，在 $(0, +\infty)$ 上为增函数的是 ()

A. $f(x)=3-x$ B. $f(x)=x^2-3x$ C. $f(x)=-\frac{1}{x+1}$ D. $f(x)=-|x|$

11. 已知函数 $y=x^2+2(a-2)x+5$ 在区间 $(4, +\infty)$ 上是增函数，则 a 的取值范

围 ()

A. $a \leq -2$ B. $a \geq -2$ C. $a \geq -6$ D. $a \leq -6$

12. 若 $f(x)$ 是偶函数, 其定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 且在 $[0, +\infty)$ 上是减函数,

则 $f(-\frac{3}{2})$ 与 $f(a^2+2a+\frac{5}{2})$ 的大小关系是 ()

A. $f(-\frac{3}{2}) > f(a^2+2a+\frac{5}{2})$ B. $f(-\frac{3}{2}) \geq f(a^2+2a+\frac{5}{2})$

C. $f(-\frac{3}{2}) < f(a^2+2a+\frac{5}{2})$ D. $f(-\frac{3}{2}) \leq f(a^2+2a+\frac{5}{2})$

二、填空题 (每题 5 分, 共 4*5=20 分)

13. 若函数 $y=ax$ 与 $y=-\frac{b}{x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上都是减函数, 则 $y=ax^2+bx+c$ 在 $[0, +\infty)$ 上是____ (填“增”或“减”) 函数.

14. 已知定义在 \mathbb{R} 上的奇函数 $f(x)$, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = x^2 + |x| - 1$, 那么 $x < 0$ 时, $f(x) =$ _____.

15. 函数 $f(x) = \frac{4}{x-2}$ ($x \in [3, 6]$) 的值域为_____.

16. 已知实数 x 满足 $x+x^{-1}=3$, 则 $\frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{x} =$ _____.

三、解答题 (17 题 10 分, 其余各题每题 12 分, 共 70 分)

17. 计算: $16^{\frac{1}{2}} + (\frac{1}{81})^{-0.25} - (\frac{1}{2})^0$

化简: $(2a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{3}})(-3a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}}) \div (-\frac{1}{4}a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{2}{3}})$.

18. 利用数轴解决下列问题: 已知全集 $U = \{x | -5 \leq x \leq 3\}$, $A = \{x | -5 \leq x < -1\}$, $B = \{x | -1 \leq x < 1\}$, 求: $C_U A$, $(C_U A) \cap B$, $(C_U A) \cup B$, $(C_U A) \cap (C_U B)$

19. 已知函数 $f(x) = x^2 + 2ax + 2$, $x \in [-5, 5]$,

(1) 当 $a = -1$ 时, 求函数的最大值和最小值;

(2) 求实数 a 的取值范围, 使 $y = f(x)$ 在区间 $[-5, 5]$ 上是单调减函数.

20. 已知函数 $f(x)$ 是偶函数, 而且在 $(0, +\infty)$ 上是增函数, 判断 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是增函数还是减函数, 并证明你的判断.

21. 已知函数 $f(x) = x + \frac{1}{x}$

(I) 判断函数的奇偶性，并加以证明；

(II) 用定义证明 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上是减函数；

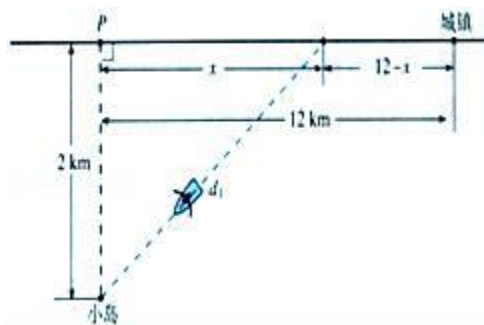
(III) 函数 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上是单调增函数还是单调减函数？（直接写出答案，不要求写证明过程）。

22. 如图，一座小岛距离海岸线上最近的点 P 的距离是 2km，从点 P 沿海岸正东 12km 处有一个小镇。

(1) 假设一个人驾驶的小船的平均速度为 3km/h，步行的速度是 5km/h， t （单位：h）表示他从小岛到城镇的时间， x （单位：km）表示此人将船停在海岸处距 P 点的距离。请将 t 表示为 x 的函数，并写出定义域。

(2) 如果将船停在距点 P 4km 处，那么从小岛到城镇要多长时间（精确到 0.1h）？

($\sqrt{5} \approx 2.236$)



2016-2017 学年云南省曲靖市沾益一中高一（上）第二次 质检数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（共 $12 \times 5 = 60$ 分，请将正确选项填写在题后答题表格中）

1. 设全集 $U = \{0, 1, 2, 3\}$ ，集合 $A = \{0, 1, 2\}$ ，集合 $B = \{2, 3\}$ ，则 $(C_U A) \cup B =$ ()

A. \emptyset B. $\{1, 2, 3\}$ C. $\{0, 1, 2, 3\}$ D. $\{2, 3\}$

【考点】交、并、补集的混合运算.

【分析】由全集 U 及 A ，求出 A 的补集，找出 A 补集与 B 的并集即可.

【解答】解： \because 全集 $U = \{0, 1, 2, 3\}$ ， $A = \{0, 1, 2\}$ ， $B = \{2, 3\}$ ，

$\therefore C_U A = \{3\}$ ，

则 $(C_U A) \cup B = \{2, 3\}$ ，

故选：D.

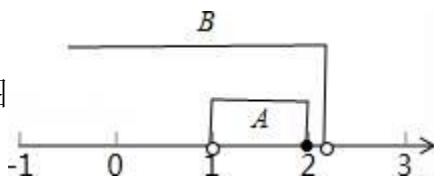
2. 设集合 $A = \{x | 1 < x \leq 2\}$ ， $B = \{x | x < a\}$ ，若 $A \subseteq B$ ，则 a 的取值范围是 ()

A. $\{a | a \geq 1\}$ B. $\{a | a \leq 1\}$ C. $\{a | a \geq 2\}$ D. $\{a | a > 2\}$

【考点】集合的包含关系判断及应用.

【分析】考察集合的包含关系，利用数轴求解即可.

【解答】解：由题意作图



则 $a > 2$ 即可，

故选 D.

3. 若全集 $U = \{0, 1, 2, 3\}$ 且 $C_U A = \{2\}$ ，则集合 A 的真子集共有 ()

A. 3 个 B. 5 个 C. 7 个 D. 8 个

【考点】子集与真子集.

【分析】利用集合中含 n 个元素，其真子集的个数为 $2^n - 1$ 个，求出集合的真子

集个数.

【解答】解: $\because U = \{0, 1, 2, 3\}$ 且 $C_U A = \{2\}$,

$\therefore A = \{0, 1, 3\}$

\therefore 集合 A 的真子集共有 $2^3 - 1 = 7$

故选 C

4. $A = \{x | x^2 + x - 6 = 0\}$, $B = \{x | mx + 1 = 0\}$ 且 $A \cup B = A$, 则 m 的取值范围 ()

A. $\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\}$ B. $\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\}$ C. $\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\}$ D. $\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\}$

【考点】集合关系中的参数取值问题.

【分析】根据已知中 $A = \{x | x^2 + x - 6 = 0\}$, $B = \{x | mx + 1 = 0\}$ 且 $A \cup B = A$, 我们分 $m = 0$, $m \neq 0$ 两种情况进行讨论, 分别求出满足条件的 m 的值, 即可得到答案.

【解答】解: $\because A = \{x | x^2 + x - 6 = 0\} = \{-3, 2\}$,

$A \cup B = A$, 则 $B \subseteq A$

若 $m = 0$, 则 $B = \emptyset$, 满足要求;

若 $m \neq 0$, 则 $B = \{x | x = -\frac{1}{m}\}$

则 $m = \frac{1}{3}$, 或 $m = -\frac{1}{2}$

综上 m 的取值范围组成的集合为 $\{0, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\}$

故选 C

5. 已知函数 $y = f(x+1)$ 定义域是 $[-2, 3]$, 则 $y = f(2x-1)$ 的定义域 ()

A. $[0, \frac{5}{2}]$ B. $[-1, 4]$ C. $[-5, 5]$ D. $[-3, 7]$

【考点】函数的定义域及其求法.

【分析】根据题目给出的函数 $y = f(x+1)$ 定义域, 求出函数 $y = f(x)$ 的定义域, 然后由 $2x - 1$ 在 $f(x)$ 的定义域内求解 x 即可得到函数 $y = f(2x - 1)$ 定义域

【解答】解: 解: \because 函数 $y = f(x+1)$ 定义域为 $[-2, 3]$,

$\therefore x \in [-2, 3]$, 则 $x+1 \in [-1, 4]$,

即函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1, 4]$,

再由 $-1 \leq 2x - 1 \leq 4$, 得: $0 \leq x \leq \frac{5}{2}$,

\therefore 函数 $y=f(2x-1)$ 的定义域为 $[0, \frac{5}{2}]$.

故选 A.

6. 下列四组中的 $f(x)$, $g(x)$, 表示同一个函数的是 ()

A. $f(x) = 1, g(x) = x^0$ B. $f(x) = x - 1, g(x) = \frac{x^2}{x} - 1$

C. $f(x) = x^2, g(x) = (\sqrt{x})^4$ D. $f(x) = x^3, g(x) = \sqrt[3]{x^9}$

【考点】 判断两个函数是否为同一函数.

【分析】 根据两个函数的定义域相同, 对应关系也相同, 这样的两个函数是同一函数, 进行判断即可.

【解答】 解: 对于 A, $f(x) = 1 (x \in \mathbb{R}), g(x) = x^0 (x \neq 0)$, 它们的定义域不同, 不是同一函数;

对于 B, $f(x) = x - 1 (x \in \mathbb{R}), g(x) = \frac{x^2}{x} - 1 = x - 1 (x \neq 0)$, 它们的定义域不同, 不是同一函数;

对于 C, $f(x) = x^2 (x \in \mathbb{R}), g(x) = (\sqrt{x})^4 = x^2 (x \geq 0)$, 它们的定义域不同, 不是同一函数;

对于 D, $f(x) = x^3 (x \in \mathbb{R}), g(x) = \sqrt[3]{x^9} = x^3 (x \in \mathbb{R})$, 它们的定义域相同, 对应关系也相同, 是同一函数.

故选: D.

7. 函数 $y=x^2 - 4x+1, x \in [2, 5]$ 的值域是 ()

A. $[1, 6]$ B. $[-3, 1]$ C. $[-3, 6]$ D. $[-3, +\infty)$

【考点】 二次函数在闭区间上的最值.

【分析】 函数 $y=x^2 - 4x+1$ 是一条以 $x=2$ 为对称轴, 开口向上的抛物线, $x \in [2, 5]$ 时, 函数是递增函数, 易求其值域

【解答】 解: $y=x^2 - 4x+1 = (x-2)^2 - 3$

\therefore 当 $x=2$ 时, 函数取最小值 -3

当 $x=5$ 时，函数取最大值 6

\therefore 函数 $y=x^2 - 4x+1$, $x \in [2, 5]$ 的值域是 $[-3, 6]$

故选 C

8. 函数 $f(x) = \frac{1}{x} - x$ 的图象关于 ()

A. y 轴对称 B. 直线 $y = -x$ 对称 C. 坐标原点对称 D. 直线 $y=x$ 对称

【考点】 奇偶函数图象的对称性.

【分析】 根据函数 $f(x)$ 的奇偶性即可得到答案.

【解答】 解: $\because f(-x) = -\frac{1}{x} + x = -f(x)$

$\therefore f(x) = \frac{1}{x} - x$ 是奇函数, 所以 $f(x)$ 的图象关于原点对称

故选 C.

9. 已知 $f(x) = ax^3 + bx - 4$, 其中 a, b 为常数, 若 $f(-2) = 2$, 则 $f(2)$ 的值等于 ()

A. -2 B. -4 C. -6 D. -10

【考点】 函数的值.

【分析】 先把 $x = -2$ 代入代数式 $ax^3 + bx - 4$ 得出 $8a + 2b$ 的值来, 再把 $x = 2$ 代入 $ax^3 + bx - 4$, 即可求出答案.

【解答】 解: $\because f(-2) = -8a - 2b - 4 = 2$

$\therefore 8a + 2b = -6$,

$\therefore f(2) = 8a + 2b - 4 = -6 - 4 = -10$

故选 D

10. 下列四个函数中, 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数的是 ()

A. $f(x) = 3 - x$ B. $f(x) = x^2 - 3x$ C. $f(x) = -\frac{1}{x+1}$ D. $f(x) = -|x|$

【考点】 函数单调性的判断与证明.

【分析】 由题意知 A 和 D 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数; B 在 $(0, +\infty)$ 上先减后增; c 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数.

【解答】解：∵ $f(x) = 3 - x$ 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数，∴A 不正确；

∵ $f(x) = x^2 - 3x$ 是开口向上对称轴为 $x = \frac{3}{2}$ 的抛物线，所以它在 $(0, +\infty)$ 上先减后增，∴B 不正确；

∵ $f(x) = -\frac{1}{x+1}$ 在 $(0, +\infty)$ 上 y 随 x 的增大而增大，所以它为增函数，∴C 正确；

∵ $f(x) = -|x|$ 在 $(0, +\infty)$ 上 y 随 x 的增大而减小，所以它为减函数，∴D 不正确。

故选 C.

11. 已知函数 $y = x^2 + 2(a - 2)x + 5$ 在区间 $(4, +\infty)$ 上是增函数，则 a 的取值范围 ()

A. $a \leq -2$ B. $a \geq -2$ C. $a \geq -6$ D. $a \leq -6$

【考点】二次函数的性质.

【分析】先求出函数的对称轴 $x = 2 - a$ ，再由二次函数的图象和条件列出关于 a 的不等式.

【解答】解：函数 $y = x^2 + 2(a - 2)x + 5$ 的对称轴为： $x = 2 - a$ ，

∵函数 $y = x^2 + 2(a - 2)x + 5$ 在区间 $(4, +\infty)$ 上是增函数，

∴ $2 - a \leq 4$ ，解得 $a \geq -2$ ，

故选 B.

12. 若 $f(x)$ 是偶函数，其定义域为 $(-\infty, +\infty)$ ，且在 $[0, +\infty)$ 上是减函数，

则 $f(-\frac{3}{2})$ 与 $f(a^2 + 2a + \frac{5}{2})$ 的大小关系是 ()

A. $f(-\frac{3}{2}) > f(a^2 + 2a + \frac{5}{2})$ B. $f(-\frac{3}{2}) \geq f(a^2 + 2a + \frac{5}{2})$

C. $f(-\frac{3}{2}) < f(a^2 + 2a + \frac{5}{2})$ D. $f(-\frac{3}{2}) \leq f(a^2 + 2a + \frac{5}{2})$

【考点】函数单调性的性质；函数奇偶性的判断.

【分析】先根据偶函数将 $f(-\frac{3}{2})$ 转化成 $f(\frac{3}{2})$ ，在同一个单调区间上比较 $a^2 + 2a + \frac{5}{2}$ 与 $\frac{3}{2}$ 的大小，再根据函数的单调性进行判定即可.

【解答】解：∵ $f(x)$ 是偶函数

$$\therefore f\left(-\frac{3}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\text{而 } a^2 + 2a + \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = (a+1)^2 \geq 0$$

$$\therefore a^2 + 2a + \frac{5}{2} \geq \frac{3}{2} > 0$$

\therefore 函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是减函数

$$\therefore f\left(-\frac{3}{2}\right) \geq f\left(a^2 + 2a + \frac{5}{2}\right)$$

故选 B

二、填空题（每题 5 分，共 4*5=20 分）

13. 若函数 $y=ax$ 与 $y=-\frac{b}{x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上都是减函数，则 $y=ax^2+bx+c$ 在 $[0, +\infty)$ 上是 减（填“增”或“减”）函数.

【考点】 函数的单调性及单调区间.

【分析】 由题意和一次函数、反比例函数判断出 a 、 b 的符号，判断出函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象开口方向、对称轴的范围，可得答案.

【解答】 解： \therefore 函数 $y=ax$ 与 $y=-\frac{b}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上都是减函数，

$$\therefore \begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \end{cases}$$

\therefore 函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象开口向下，对称轴是 $x=-\frac{b}{2a} < 0$,

则 $y=ax^2+bx+c$ 在 $[0, +\infty)$ 上是减函数，

故答案为：减.

14. 已知定义在 \mathbb{R} 上的奇函数 $f(x)$ ，当 $x > 0$ 时， $f(x) = x^2 + |x| - 1$ ，那么 $x < 0$ 时， $f(x) = \underline{-x^2 + x + 1}$.

【考点】 函数奇偶性的性质.

【分析】 先设 $x < 0$ ，则 $-x > 0$ ，代入 $f(x) = x^2 + |x| - 1$ 并进行化简，再利用 $f(x) = -f(-x)$ 进行求解.

【解答】 解：设 $x < 0$ ，则 $-x > 0$ ，

\therefore 当 $x > 0$ 时， $f(x) = x^2 + |x| - 1$ ， $\therefore f(-x) = x^2 + |-x| - 1 = x^2 - x - 1$ ，

$\because f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的奇函数, $\therefore f(x) = -f(-x) = -x^2 + x + 1$,

故答案为: $-x^2 + x + 1$.

15. 函数 $f(x) = \frac{4}{x-2}$ ($x \in [3, 6]$) 的值域为 $[1, 4]$.

【考点】 函数的值域.

【分析】 根据反比例函数的性质, 考查原函数 $f(x) = \frac{4}{x-2}$ ($x \in [3, 6]$) 的单调性即可求解.

【解答】 解: \because 函数 $f(x) = \frac{4}{x-2}$ ($x \in [3, 6]$) 是减函数,

故当 $x=6$ 时, y 取得最小值 1, 当 $x=3$ 时, y 取得最大值 4,

\therefore 函数的值域为 $[1, 4]$

故答案为: $[1, 4]$.

16. 已知实数 x 满足 $x+x^{-1}=3$, 则 $\frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{2} = \underline{\sqrt{5}}$.

【考点】 有理数指数幂的运算性质.

【分析】 设 $\frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{2} = t > 0$, 将其平方即可求出.

【解答】 解: 设 $\frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{2} = t > 0$, 则 $t^2 = x+x^{-1} + 2 = 5$, $\therefore t = \sqrt{5}$.

故答案为 $\sqrt{5}$.

三、解答题 (17 题 10 分, 其余各题每题 12 分, 共 70 分)

17. 计算: $16^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{81}\right)^{-0.25} - \left(\frac{1}{2}\right)^0$

化简: $(2a^{\frac{1}{4}} b^{\frac{1}{3}})(-3a^{-\frac{1}{2}} b^{\frac{2}{3}}) \div \left(-\frac{1}{4} a^{\frac{1}{4}} b^{-\frac{2}{3}}\right)$.

【考点】 有理数指数幂的化简求值.

【分析】 利用指数性质、运算法则直接求解.

【解答】 解: $16^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{81}\right)^{-0.25} - \left(\frac{1}{2}\right)^0$

$$=4+3-1$$

$$=6.$$

$$\begin{aligned} & (2a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{3}})(-3a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}}) \div (-\frac{1}{4}a^{-\frac{1}{4}}b^{-\frac{2}{3}}) \\ &= \frac{3}{2} a^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} b^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}} \\ &= \frac{3}{2} b. \end{aligned}$$

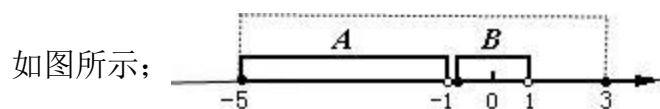
18. 利用数轴解决下列问题：已知全集 $U = \{x \mid -5 \leq x \leq 3\}$ ， $A = \{x \mid -5 \leq x < -1\}$ ， $B = \{x \mid -1 \leq x < 1\}$ ，求： $C_U A$ ， $(C_U A) \cap B$ ， $(C_U A) \cup B$ ， $(C_U A) \cap (C_U B)$

【考点】 交、并、补集的混合运算.

【分析】 在数轴上画出全集 U 、集合 A 、 B ，

结合数轴，利用集合的定义与运算法则，计算即可.

【解答】 解：在数轴上画出全集 $U = \{x \mid -5 \leq x \leq 3\}$ ， $A = \{x \mid -5 \leq x < -1\}$ ， $B = \{x \mid -1 \leq x < 1\}$ ，



结合数轴，利用集合的定义与运算法则知，

$$C_U A = \{x \mid -1 \leq x \leq 3\},$$

$$(C_U A) \cap B = \{x \mid -1 \leq x < 1\},$$

$$(C_U A) \cup B = \{x \mid -1 \leq x \leq 3\};$$

$$\text{又 } C_U B = \{x \mid -5 \leq x < -1 \text{ 或 } 1 \leq x \leq 3\},$$

$$\therefore (C_U A) \cap (C_U B) = C_U (A \cup B) = \{x \mid 1 \leq x \leq 3\}.$$

19. 已知函数 $f(x) = x^2 + 2ax + 2$ ， $x \in [-5, 5]$ ，

(1) 当 $a = -1$ 时，求函数的最大值和最小值；

(2) 求实数 a 的取值范围，使 $y = f(x)$ 在区间 $[-5, 5]$ 上是单调减函数.

【考点】 二次函数在闭区间上的最值；二次函数的性质.

【分析】 (1) 当 $a = -1$ 时 $f(x) = x^2 - 2x + 2$ ，可得区间 $(-5, 1)$ 上函数为减函数，在区间 $(1, 5)$ 上函数为增函数. 由此可得 $[f(x)]_{\max} = 37$ ， $[f(x)]_{\min} = 1$ ；

(2) 由题意, 得函数 $y=f(x)$ 的单调减区间是 $(-\infty, -a]$, 由 $[-5, 5] \subseteq (-\infty, -a]$, 可得 $-a \geq 5$, 解出 $a \leq -5$, 即为实数 a 的取值范围.

【解答】解: (1) 当 $a = -1$ 时, 函数表达式是 $f(x) = x^2 - 2x + 2$,

\therefore 函数图象的对称轴为 $x=1$,

在区间 $(-5, 1)$ 上函数为减函数, 在区间 $(1, 5)$ 上函数为增函数.

\therefore 函数的最小值为 $[f(x)]_{\min} = f(1) = 1$,

函数的最大值为 $f(5)$ 和 $f(-5)$ 中较大的值, 比较得 $[f(x)]_{\max} = f(-5) = 37$

综上所述, 得 $[f(x)]_{\max} = 37$, $[f(x)]_{\min} = 1$

(2) \because 二次函数 $f(x)$ 图象关于直线 $x = -a$ 对称, 开口向上

\therefore 函数 $y=f(x)$ 的单调减区间是 $(-\infty, -a]$, 单调增区间是 $[-a, +\infty)$,

由此可得当 $[-5, 5] \subseteq (-\infty, -a]$ 时,

即 $-a \geq 5$ 时, $f(x)$ 在 $[-5, 5]$ 上单调减, 解之得 $a \leq -5$.

即当 $a \leq -5$ 时 $y=f(x)$ 在区间 $[-5, 5]$ 上是单调减函数.

20. 已知函数 $f(x)$ 是偶函数, 而且在 $(0, +\infty)$ 上是增函数, 判断 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是增函数还是减函数, 并证明你的判断.

【考点】奇偶性与单调性的综合.

【分析】用单调性定义来证明, 先在给定区间上取两个变量, 且界定大小, 不妨设 $x_1 < x_2 < 0$ 则有 $-x_1 > -x_2 > 0$,

再由“ $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数”可得到 $f(-x_1) > f(-x_2)$, 然后由“ $f(x)$ 是偶函数”转化为 $f(x_1) > f(x_2)$, 再由单调性定义判断.

【解答】解: $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是减函数

证明: 设 $x_1 < x_2 < 0$ 则 $-x_1 > -x_2 > 0$

$\because f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数

$\therefore f(-x_1) > f(-x_2)$

又 $f(x)$ 是偶函数

$\therefore f(-x_1) = f(x_1)$, $f(-x_2) = f(x_2)$

$\therefore f(x_1) > f(x_2)$

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是减函数

21. 已知函数 $f(x) = x + \frac{1}{x}$

(I) 判断函数的奇偶性，并加以证明；

(II) 用定义证明 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上是减函数；

(III) 函数 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上是单调增函数还是单调减函数？（直接写出答案，不要求写证明过程）.

【考点】 奇偶性与单调性的综合.

【分析】 (I) 用函数奇偶性定义证明，要注意定义域. (II) 先任取两个变量，且界定大小，再作差变形看符号，(III) 由函数图象判断即可.

【解答】 证明：(I) 函数为奇函数 $f(-x) = -x - \frac{1}{x} = -(x + \frac{1}{x}) = -f(x)$

(II) 设 $x_1, x_2 \in (0, 1)$ 且 $x_1 < x_2$

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2 + \frac{1}{x_2} - x_1 - \frac{1}{x_1} = (x_2 - x_1) \left(1 - \frac{1}{x_1 x_2}\right)$$
$$= \frac{(x_2 - x_1)(x_1 x_2 - 1)}{x_1 x_2}$$

$\because 0 < x_1 < x_2 < 1, \therefore x_1 x_2 < 1, x_1 x_2 - 1 < 0,$

$\because x_2 > x_1, \therefore x_2 - x_1 > 0.$

$\therefore f(x_2) - f(x_1) < 0, f(x_2) < f(x_1)$

因此函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上是减函数

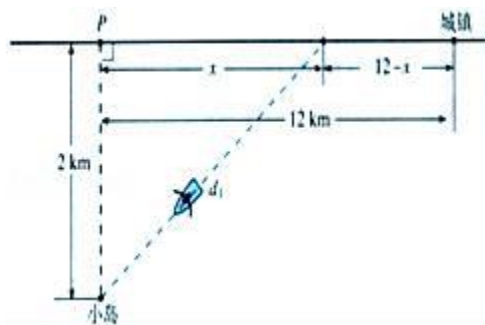
(III) $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上是减函数.

22. 如图，一座小岛距离海岸线上最近的点 P 的距离是 2km，从点 P 沿海岸正东 12km 处有一个小镇.

(1) 假设一个人驾驶的小船的平均速度为 3km/h，步行的速度是 5km/h， t （单位：h）表示他从小岛到城镇的时间， x （单位：km）表示此人将船停在海岸处距 P 点的距离. 请将 t 表示为 x 的函数，并写出定义域.

(2) 如果将船停在距点 P 4km 处，那么从小岛到城镇要多长时间（精确到 0.1h）？

($\sqrt{5} \approx 2.236$)



【考点】 函数模型的选择与应用.

【分析】 (1) 根据总的时间 t 为驾船行驶的时间与步行到城镇的时间之和, 分别表示出从小岛到 Q 点的时间为 $\frac{\sqrt{x^2+4}}{3}$, 从 Q 点到城镇所需的时间为 $\frac{12-x}{5}$, 即可

求得函数 $t(x)$, 根据实际意义, 求得定义域, 从而得到答案;

(2) 根据题意可知 $x=4$, 将 $x=4$ 代入到 $t(x)$ 中, 求解即可得到从小岛到城镇要多长时间.

【解答】 解: (1) 总的时间 t 为驾船行驶的时间与步行到城镇的时间之和,

小岛到 Q 点的距离: $\sqrt{x^2+4}$,

\therefore 从小岛到 Q 点的时间为: $\frac{\sqrt{x^2+4}}{3}$,

Q 点到城镇的距离: $12-x$,

\therefore 从 Q 点到城镇所需的时间为: $\frac{12-x}{5}$,

$\therefore t(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}}{3} + \frac{12-x}{5}, 0 \leq x \leq 12;$

(2) $\therefore t(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}}{3} + \frac{12-x}{5}, 0 \leq x \leq 12,$

\therefore 将 $x=4$ 代入函数 $t(x)$, 得 $t(4) = \frac{2\sqrt{5}}{3} + \frac{8}{5} \approx 3.1$ (h),

\therefore 从小岛到城镇要 3.1h.

2017年5月7日