2015-2016 学年高三（上）期末数学试卷

一、填空题（本大题共 14 小题，每小题 5 分，共 70 分）

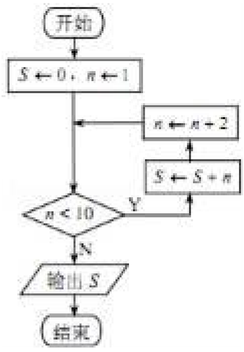
1．设集合 A={x|x＞1}，B={x|x^2＜9}，则 A∩B=____________.

2．设 a，b∈R，i 为虚数单位，若（a+bi）•i=2﹣5i，则 ab 的值为____________.

3．在平面直角坐标系 xOy，已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0，b＞0）的一个渐近线的方程为 $y=\sqrt{3}x$，则该双曲线的离心率为____________.

4．已知一组数据 9.8，10.1，10，10.2，9.9，那么这组数据的方差为____________.

5．如图是一个算法流程图，运行后输出的结果是____________.



6. 若函数$f(x)=a\sin(x+\frac{\pi}{4})+\sqrt{3}\sin(x-\frac{\pi}{4})$是偶函数，则实数 a 的值为____________.

7．正四棱锥的底面边长为 2cm，侧面与底面所成二面角的大小为 60°，则该四棱锥的侧面积为____________cm^2.

8．将函数 f（x）=sin（2x+φ）（0＜φ＜π）的图象向右平移 2 个单位后得到的函数图象关于原点对称，则实数φ的值为____________.

9．二次函数 y=f（x）=ax^2+bx+c（x∈R）的部分对应如表：

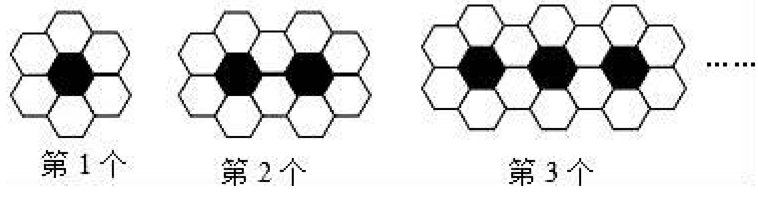
x	﹣4	﹣3	﹣2	﹣1	0	1	2	3
y	6	0	﹣4	﹣6	﹣6	﹣4	0	6

则关于 x 的不等式 f（x）≤0 的解集为____________.

10．在正五边形 ABCDE 中，已知$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=9$，则该正五边形的对角线的长为____________.

11．用大小完全相同的黑、白两种颜色的正六边形积木拼成如图所示的图案，按此规律再拼 5 个图案，并将这 8 个图案中的所有正六边形积木充分混合后装进一个盒子中，现从盒子中随机取出一个积木，则取出黑色积木的概率

是____________.



12．若函数 $f(x)=\begin{cases}(x-a)^2, & x\leqslant 0\\ x-\ln x+5+a, & x>0\end{cases}$ 的最小值为 f（0），则实数 a 的取值范围是____________．

13．在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 P（﹣1，0），Q（2，1），直线 l：ax+by+c=0，其中实数 a，b，c 成等差数列，若点 P 在直线 l 上的射影为 H，则线段 QH 的取值范围是____________．

14．在平面直角坐标系 xOy 中，将函数 $y=\sqrt{3+2x-x^2}-\sqrt{3}$（x∈[0，2]）的图象绕坐标原点 O 按逆时针方向旋转角θ，若∀θ∈[0，a]，旋转后所得的曲线都是某个函数的图象，则 a 的最大值为____________．

二、解答题（本大题共 6 小题，共 90 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）．

15．已知θ∈（$\frac{3\pi}{4}$，$\frac{5\pi}{4}$），sin（$\theta-\frac{\pi}{4}$）$=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

（1）求 sinθ的值；

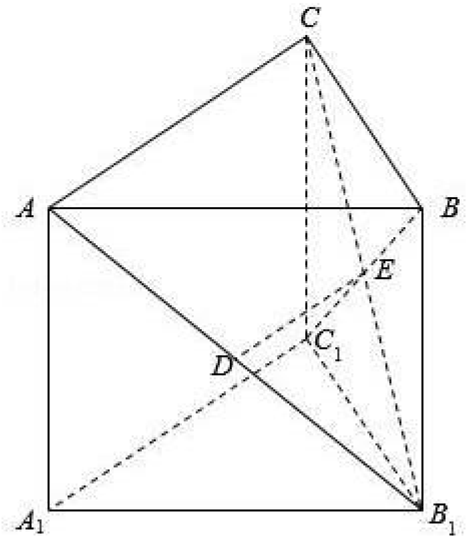
（2）求 cos（$2\theta+\frac{\pi}{3}$）的值．

16．如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，已知 AC⊥BC，$BC=CC_1$，设 AB_1 的中点为 D，$B_1C\cap BC_1=E$．

求证：

（1）DE∥平面 AA_1C_1C；

（2）$BC_1\perp AB_1$．



17．在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）的焦距为 2．

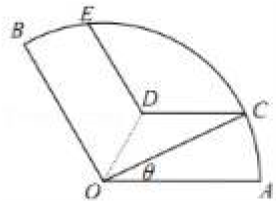
（1）若椭圆 C 经过点（$\frac{\sqrt{6}}{2}$，1），求椭圆 C 的标准方程；

（2）设 A（﹣2，0），F 为椭圆 C 的左焦点，若椭圆 C 上存在点 P，满足$\frac{PA}{PF}=\sqrt{2}$，求椭圆 C 的离心率的取值范围．

18．如图，扇形 AOB 是一个植物园的平面示意图，其中∠AOB=$\frac{2\pi}{3}$，半径 OA=OB=1km，为了便于游客观赏，拟在圆内铺设一条从入口 A 到出口 B 的观赏道路，道路由弧$\widehat{AC}$，线段 CD，线段 DE 和弧$\widehat{EB}$组成，且满足：$\widehat{AC}=\widehat{EB}$，CD∥AO．DE∥OB，OD∈[$\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\frac{\sqrt{6}}{3}$]（单位：km），设∠AOC=θ．

（1）用θ表示 CD 的长度，并求出θ的取值范围；

（2）当θ为何值时，观赏道路最长？



19．已知公差不为 0 的等差数列{a_n}的首项为 1，前 n 项和为 S_n，且数列{$\frac{S_n}{a_n}$}是等差数列．

（1）求数列{a_n}的通项公式；

（2）设 $\lg b_n=\frac{a_n}{3^n}$（$n\in N^*$），问：b_1，b_k，b_m（k，m 均为正整数，且 1＜k＜m）能否成等比数列？若能，求出所有的 k 和 m 的值；若不能，请说明理由．

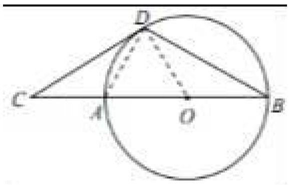
20．设 a 为正实数，函数 f（x）=ax，g（x）=lnx．

（1）求函数 h（x）=f（x）•g（x）的极值；

（2）证明：$\exists x_0\in R$，使得当 $x>x_0$ 时，f（x）＞g（x）恒成立．

四、选做题从 21-24 题中任选 2 个小题，每小题 10 分，共 20 分

21．如图，AB 是圆 O 的直径，D 为圆 O 上一点，过 D 作圆 O 的切线交 BA 的延长线于点 C，若 DB=DC，求证：CA=AO．



22．已知矩阵 A=$\begin{bmatrix}-1&0\\0&2\end{bmatrix}$，B=$\begin{bmatrix}1&2\\0&6\end{bmatrix}$，求矩阵 $A^{-1}B$．

23．已知圆 C 的极坐标方程为$\rho^2+2\sqrt{2}\rho\sin(\theta-\frac{\pi}{4})-4=0$，求圆心的极坐标．

24．设 a，b 是非负实数，求证：$a^3+b^3\geq\sqrt{ab}(a^2+b^2)$．

25．一批产品共 10 件，其中 3 件是不合格品，用下列两种不同方式从中随机抽取 2 件产品检验：

方式一：一次性随机抽取 2 件；
方式二：先随机抽取 1 件，放回后再随机抽取 1 件；
记抽取的不合格产品数为ξ.
（1）分别求两种抽取方式下ξ的概率分布；
（2）比较两种抽取方式抽到的不合格品平均数的大小？并说明理由.

26．在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 C：$y^2=4x$，设点 A（﹣t，0），B（t，0）（t＞0），过点 B 的直线与抛物线 C 交于 P，Q 两点，（P 在 Q 的上方）.
（1）若 t=1，直线 PQ 的倾斜角为$\frac{\pi}{4}$，求直线 PA 的斜率；
（2）求证：∠PAO=∠QAO．

2015-2016学年江苏省南通市海安县高三（上）期末数学试卷

参考答案与试题解析

一、填空题（本大题共14小题，每小题5分，共70分）

1．设集合 A={x|x>1}，B={x|x^2<9}，则 A∩B=__{x|1<x<3}__．

【考点】交集及其运算．

【分析】利用交集的性质和不等式的性质求解．

【解答】解：∵集合 A={x|x>1}，

集合 B={x|x^2<9}={x|－3<x<3}，

∴集合 A∩B={x|1<x<3}．

故答案为：{x|1<x<3}．

2．设 a，b∈R，i 为虚数单位，若（a+bi）•i=2－5i，则 ab 的值为__10__．

【考点】复数代数形式的乘除运算．

【分析】直接由（a+bi）•i=2－5i，得－b+ai=2－5i，即可求出 a、b 的值，则答案可求．

【解答】解：由（a+bi）•i=2－5i，

得－b+ai=2－5i，即 a=－5，b=－2．

则 ab=－5×（－2）=10．

故答案为：10．

3．在平面直角坐标系 xOy，已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a>0，b>0）的一个渐近线的方程为 $y=\sqrt{3}x$，则该双曲线的离心率为__2__．

【考点】双曲线的简单性质．

【分析】求出双曲线的渐近线方程 $y=\pm\frac{b}{a}x$，由题意可得 $b=\sqrt{3}a$，由 a，b，c 的关系和离心率公式计算即可得到所求值．

【解答】解：双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a>0，b>0）的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，

由一条渐近线的方程为 $y=\sqrt{3}x$，可得 $b=\sqrt{3}a$，

即有 $c=\sqrt{a^2+b^2}=2a$，

即有 $e=\frac{c}{a}=2$．

故答案为：2．

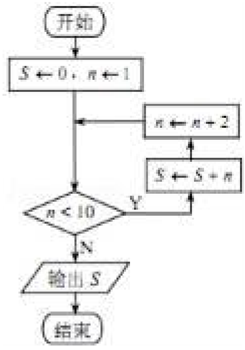
4．已知一组数据 9.8，10.1，10，10.2，9.9，那么这组数据的方差为__0.02__．

【考点】极差、方差与标准差.
【分析】先计算数据的平均数，代入方差公式，可得答案.
【解答】解：9.8，10.1，10，10.2，9.9 的平均数为 10，

故方差 $s^2=\frac{1}{5}$［（9.8 - 10）^{2}+（10.1 - 10）^{2}+（10 - 10）^{2}+（10.2 - 10）^{2}+（9.9 - 10）^{2}］=0.02，

故答案为：0.02

5．如图是一个算法流程图，运行后输出的结果是 25 .



【考点】程序框图.
【分析】按照程序框图的流程写出前几次循环的结果，并判断每一次得到的结果是否满足判断框中的条件，直到满足条件，执行输出.
【解答】解：经过第一次循环得到结果为 s=1，n=3，此时满足判断框的条件
经过第二次循环得到结果为 s=4，n=5，此时满足判断框的条件
经过第三次循环得到结果为 s=9，n=7，此时满足判断框的条件
经过第四次循环得到结果为 s=16，n=9，此时满足判断框的条件，
经过第四次循环得到结果为 s=25，i=11，此时不满足判断框的条件，
执行输出 s，即输出 25，
故答案为：25.

6．若函数 $f(x)=a\sin(x+\frac{\pi}{4})+\sqrt{3}\sin(x-\frac{\pi}{4})$ 是偶函数，则实数 a 的值为 $-\sqrt{3}$.
【考点】三角函数中的恒等变换应用；正弦函数的图象.
【分析】由题意可得，$f(-\frac{\pi}{4})=f(\frac{\pi}{4})$，从而可求得实数 a 的值.

【解答】解：∵$f(x)=a\sin(x+\frac{\pi}{4})+\sqrt{3}\sin(x-\frac{\pi}{4})$ 为偶函数，

∴$f(-x)=f(x)$，

∴$f(-\frac{\pi}{4})=f(\frac{\pi}{4})$，

即 $-\sqrt{3}=a$，
∴$a=-\sqrt{3}$.
故答案为：$-\sqrt{3}$.

7．正四棱锥的底面边长为2cm，侧面与底面所成二面角的大小为60°，则该四棱锥的侧面积为__8__cm^2.

【考点】二面角的平面角及求法.

【分析】在正四棱锥V﹣ABCD中，底面正方形ABCD边长为2cm，侧面VAB与底面ABCD所成二面角的大小为60°，过V作平面ABC的垂线VO，交平面ABC于O点，过O作OE⊥AB，交AB于E，连结VE，则∠VEO是二面角V﹣AB﹣C的平面角，由此示出VE=2，由此能求出该四棱锥的侧面积.

【解答】解：如图，在正四棱锥V﹣ABCD中，底面正方形ABCD边长为2cm，

侧面VAB与底面ABCD所成二面角的大小为60°，

过V作平面ABC的垂线VO，交平面ABC于O点，

过O作OE⊥AB，交AB于E，连结VE，

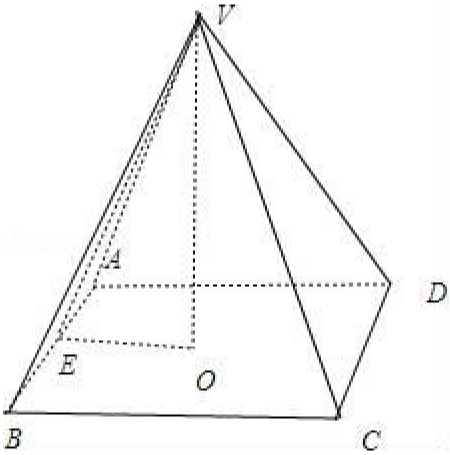
则∠VEO是二面角V﹣AB﹣C的平面角，∴∠VEO=60°，

∵OE=AE=BE=1，∴$VE=\frac{OE}{\cos 60^\circ}=2$，

∴$\cos\angle VEO=\frac{EO}{VE}=\frac{1}{2}$，

∴该四棱锥的侧面积$S=4\times\left(\frac{1}{2}\times 2\times 2\right)=8$.

故答案为：8.



8．将函数f（x）=sin（2x+φ）（0＜φ＜π）的图象向右平移2个单位后得到的函数图象关于原点对称，则实数φ的值为__4﹣π__.

【考点】函数y=Asin（ωx+φ）的图象变换.

【分析】由条件利用y=Asin（ωx+φ）的图象变换规律，正弦函数、余弦函数的图象的对称性，得出结论.

【解答】解：将函数f（x）=sin（2x+φ）（0＜φ＜π）的图象向右平移2个单位后，

得到y=sin[2（x﹣2）+φ]=sin（2x﹣4+φ）的图象，

再根据得到的函数图象关于原点对称，∴﹣4+φ=kπ，k∈Z，

则实数φ的值为4﹣π，

故答案为：4﹣π.

9．二次函数y=f（x）=ax^2+bx+c（x∈R）的部分对应如表：

x	－4	－3	－2	－1	0	1	2	3
y	6	0	－4	－6	－6	－4	0	6

则关于 x 的不等式 f（x）≤0 的解集为__[－3，2]__.

【考点】二次函数的性质.

【分析】由表中数据可看出 f（x）过点（－3，0），(0，－6)，(2，0)，将这三点的坐标分别带入 f（x）便可得出关于 a，b，c 的方程组，可解出 a，b，c 的值，从而可以解一元二次不等式 f（x）≤0，这样即可得出该不等式的解集.

【解答】解：根据条件知，f（x）过点（－3，0），(0，－6)，(2，0)；

$$\therefore \begin{cases} 9a-3b+c=0 \\ c=-6 \\ 4a+2b+c=0 \end{cases};$$

$$解得\begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=-6 \end{cases};$$

∴f（x）$=x^2+x-6$；

∴解 $x^2+x-6\leq 0$ 得，$-3\leq x\leq 2$；

∴f（x）≤0 的解集为[－3，2].

故答案为：[－3，2].

10．在正五边形 ABCDE 中，已知$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=9$，则该正五边形的对角线的长为__$3\sqrt{2}$__.

【考点】平面向量数量积的运算.

【分析】设该正五边形的边长为 x，由于$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=9$，可得 x•2xcos36°•cos36°=9，即可得出该正五边形的对角线的长 2xcos36°.

【解答】解：设该正五边形的边长为 x，

∵$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=9$，

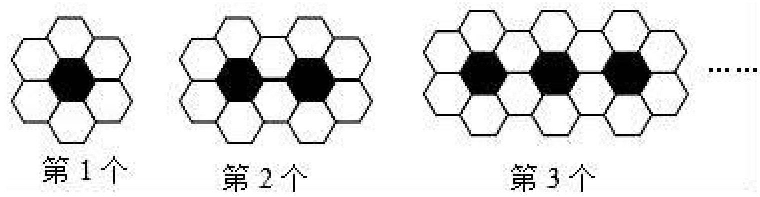
∴x•2xcos36°•cos36°=9，

$$\therefore x=\frac{3}{\sqrt{2}\cos 36^\circ},$$

∴该正五边形的对角线的长 2xcos36°=$3\sqrt{2}$.

故答案为：$3\sqrt{2}$.

11．用大小完全相同的黑、白两种颜色的正六边形积木拼成如图所示的图案，按此规律再拼 5 个图案，并将这 8 个图案中的所有正六边形积木充分混合后装进一个盒子中，现从盒子中随机取出一个积木，则取出黑色积木的概率是__$\frac{1}{196}$__.



【考点】归纳推理.

【分析】由图形可知各图形中的黑色积木和白色积木分别成等差数列，求出积木总个数，使用古典概型的概率计算公式计算概率.

【解答】解：由图可知第 1 个图形由 1 个黑色积木，6 个白色积木，第二个图形有 2 个黑色积木，10 个白色积木，第三个图形有 3 个黑色积木，14 个白色积木，

依此类推，故图形中的黑色积木数组成一个等差数列，公差为 1，白色积木数组成一个等差数列，公差为 4.

从而前 8 个图形共有黑色积木个数为 $8\times1+\frac{8\times7}{2}\times1=36$，共有白色积木个数为 $8\times6+\frac{8\times7}{2}\times4=160$.

∴取出黑色积木的概率 $P=\frac{1}{36+160}=\frac{1}{196}$.

故答案为$\frac{1}{196}$.

12．若函数 $f(x)=\begin{cases}(x-a)^2, & x\leqslant0\\ x-\ln x+5+a, & x>0\end{cases}$的最小值为 f（0），则实数 a 的取值范围是__[0，3]__.

【考点】函数的最值及其几何意义.

【分析】若 f（0）为 f（x）的最小值，则当 x≤0 时，函数 $f(x)=(x-a)^2$ 为减函数，当 x＞0 时，求出函数 f（x）的最小值 f（1）≥f（0），进而得到实数 a 的取值范围.

【解答】解：若 f（0）为 f（x）的最小值，

则当 x≤0 时，函数 $f(x)=(x-a)^2$ 为减函数，故 a≥0；

当 x＞0 时，$f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$，由 f′（x）＞0 得 x＞1，由 f′（x）＜0 得 0＜x＜1，即当 x=1 时函数取得极小值同时也是最小值 f（1）=1﹣ln1+5+a=6+a，

则满足 f（1）≥f（0），

即 $6+a\geqslant a^2$，得 $a^2-a-6\leqslant0$，

解得：﹣2≤a≤3，

∵a≥0，∴0≤a≤3

综上所述实数 a 的取值范围是[0，3]，

故答案为：[0，3].

13．在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 P（﹣1，0），Q（2，1），直线 l：ax+by+c=0，其中实数 a，b，c 成等差数列，若点 P 在直线 l 上的射影为 H，则线段 QH 的取值范围是__$[\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]$__.

【考点】点到直线的距离公式.

【分析】直线 l：ax+by+c=0，其中实数 a，b，c 成等差数列，可得 a（2x+y）+c（y+2）=0，令$\begin{cases}2x+y=0\\ y+2=0\end{cases}$，可得直线 l：ax+by+c=0，恒经过定点 M（1，﹣2）. 由于 PH⊥l，可得点 H 在以 PM 为直径的圆上，其圆心 C（0，﹣1）. 圆的方程为：$x^2+(y+1)^2=8$. 则|QC|﹣r≤|QH|≤|QC|+r.

【解答】解：直线 l：ax+by+c=0，其中实数 a，b，c 成等差数列，

∴$ax+\frac{a+c}{2}y+c=0$，化为 a（2x+y）+c（y+2）=0，令$\begin{cases}2x+y=0\\y+2=0\end{cases}$，解得 x=1，y=﹣2.

∴直线 l：ax+by+c=0，恒经过定点 M（1，﹣2）.

∵PH⊥l，

∴点 H 在以 PM 为直径的圆上，其圆心 C（0，﹣1）.

圆的方程为：$x^2+(y+1)^2=8$.

$|QC|=2\sqrt{2}$.

∴|QC|﹣r≤|QH|≤|QC|+r，

线段 QH 的取值范围是$[\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]$.

故答案为：$[\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]$.

14．在平面直角坐标系 xOy 中，将函数$y=\sqrt{3+2x-x^2}-\sqrt{3}$（x∈[0，2]）的图象绕坐标原点 O 按逆时针方向旋转角θ，若∀θ∈[0，a]，旋转后所得的曲线都是某个函数的图象，则 a 的最大值为__60°___.

【考点】曲线与方程.

【分析】确定函数在 x=0 处，函数图象的切线斜率，可得倾斜角，从而可得结论.

【解答】解：由题意，函数图象如图所示，函数在[0，1]上为增函数，在[1，2]上为减函数.

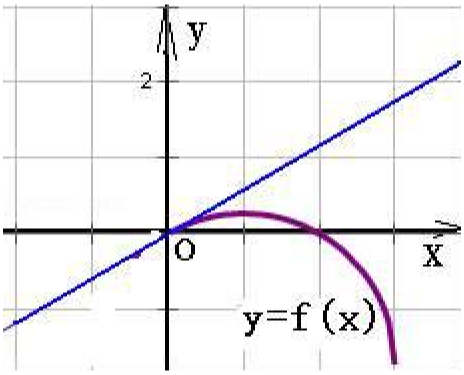
设函数在 x=0 处，切线斜率为 k，则 k=f'（0）

∵$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{-2(x-1)}{\sqrt{3+2x-x^2}}$，

∴$k=f'(0)=\frac{\sqrt{3}}{3}$，可得切线的倾斜角为 30°，

因此，要使旋转后的图象仍为一个函数的图象，旋转θ后的切线倾斜角最多为 90°，也就是说，最大旋转角为 90°﹣30°=60°，即θ的最大值为 60°.

故答案为：60°



二、解答题（本大题共 6 小题，共 90 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）.

15．已知θ∈$(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$，$\sin(\theta-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

（1）求 sinθ的值；

（2）求 $\cos(2\theta+\frac{\pi}{3})$ 的值．

【考点】两角和与差的余弦函数．

【分析】（1）由条件利用同角三角函数的基本关系，两角差的正弦公式求得 sinθ的值．

（2）由条件利用同角三角函数的基本关系、二倍角公式，两角和的余弦，求得要求式子的值．

【解答】解：（1）$\because\theta\in(\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4})$，$\sin(\theta-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\therefore\theta-\frac{\pi}{4}\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，

$\cos(\theta-\frac{\pi}{4})=-\sqrt{1-\sin^2(\theta-\frac{\pi}{4})}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$．

$\therefore\sin\theta=\sin[(\theta-\frac{\pi}{4})+\frac{\pi}{4}]=\sin(\theta-\frac{\pi}{4})\cos\frac{\pi}{4}+\cos(\theta-\frac{\pi}{4})\sin\frac{\pi}{4}$

$=\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2})=-\frac{\sqrt{10}}{10}$．

（2）结合（1）可求 $\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$，

$\therefore\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\cdot(-\frac{\sqrt{10}}{10})\cdot(-\frac{3\sqrt{10}}{10})=\frac{3}{5}$，

$\cos2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2\cdot(-\frac{\sqrt{10}}{10})^2=\frac{4}{5}$，

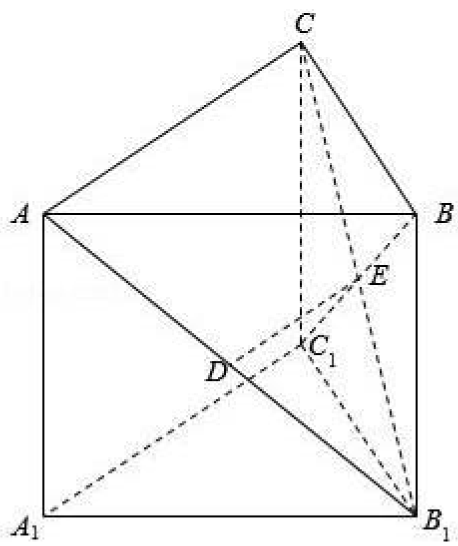
$\therefore\cos(2\theta+\frac{\pi}{3})=\cos2\theta\cdot\cos\frac{\pi}{3}-\sin2\theta\sin\frac{\pi}{3}=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}-\frac{3}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$．

16．如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，已知 $AC\perp BC$，$BC=CC_1$，设 AB_1 的中点为 D，$B_1C\cap BC_1=E$．

求证：

（1）DE∥平面 AA_1C_1C；

（2）$BC_1\perp AB_1$．



【考点】直线与平面平行的判定；直线与平面垂直的性质．

【分析】(1) 根据中位线定理得 DE∥AC，即证 DE∥平面 AA_1C_1C；
(2) 先由直三棱柱得出 CC_1⊥平面 ABC，即证 $AC⊥CC_1$；再证明 AC⊥平面 BCC_1B_1，即证 $BC_1⊥AC$；最后证明 BC_1⊥平面 B_1AC，即可证出 $BC_1⊥AB_1$.
【解答】证明：(1) 根据题意，得；
E 为 B_1C 的中点，D 为 AB_1 的中点，所以 DE∥AC；
又因为 DE⊄平面 AA_1C_1C，AC⊂平面 AA_1C_1C，
所以 DE∥平面 AA_1C_1C；
(2) 因为棱柱 ABC﹣$A_1B_1C_1$ 是直三棱柱，
所以 CC_1⊥平面 ABC，
因为 AC⊂平面 ABC，
所以 $AC⊥CC_1$；
又因为 AC⊥BC，
CC_1⊂平面 BCC_1B_1，
BC⊂平面 BCC_1B_1，
$BC∩CC_1=C$，
所以 AC⊥平面 BCC_1B_1；
又因为 BC_1⊂平面 BCC_1B_1，
所以 $BC_1⊥AC$；
因为 $BC=CC_1$，所以矩形 BCC_1B_1 是正方形，
所以 BC_1⊥平面 B_1AC；
又因为 AB_1⊂平面 B_1AC，
所以 $BC_1⊥AB_1$.

17．在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）的焦距为 2.
(1) 若椭圆 C 经过点（$\frac{\sqrt{6}}{2}$，1），求椭圆 C 的标准方程；
(2) 设 A（﹣2，0），F 为椭圆 C 的左焦点，若椭圆 C 上存在点 P，满足$\frac{PA}{PF}=\sqrt{2}$，求椭圆 C 的离心率的取值范围.
【考点】椭圆的简单性质.
【分析】(1) 由题意可得 $a^2-b^2=1$，代入已知点，可得 a，b 的方程，解方程即可得到所求椭圆方程；
(2) 设 P（x，y），运用两点的距离公式，化简整理，即可得到 P 的轨迹方程，由题意和圆相交的条件，结合离心率公式，即可得到所求范围.
【解答】解：(1) 由题意可得 c=1，即 $a^2-b^2=1$，
又代入点（$\frac{\sqrt{6}}{2}$，1），可得$\frac{3}{4a^2}+\frac{1}{b^2}=1$，
解方程可得 $a=\sqrt{3}$，$b=\sqrt{2}$，
即有椭圆的方程为$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$；

（2）由题意方程可得 F（﹣1，0），

设 P（x，y），由 $PA=\sqrt{2}PF$，

可得$\sqrt{(x+2)^2+y^2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{(x+1)^2+y^2}$，

化简可得 $x^2+y^2=2$，

由 c=1，即 $a^2-b^2=1$，

由椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 和圆 $x^2+y^2=2$ 有交点，

可得 b≤2≤a，又 $b=\sqrt{a^2-1}$，

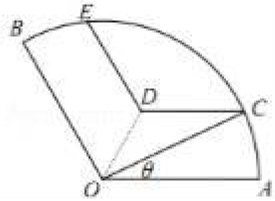
可得 $2\le a\le\sqrt{5}$，

即有离心率 $e=\frac{c}{a}\in[\frac{\sqrt{5}}{5}，\frac{1}{2}]$.

18．如图，扇形 AOB 是一个植物园的平面示意图，其中$\angle AOB=\frac{2\pi}{3}$，半径 OA=OB=1km，为了便于游客观赏，拟在圆内铺设一条从入口 A 到出口 B 的观赏道路，道路由弧$\overset{\frown}{AC}$，线段 CD，线段 DE 和弧$\overset{\frown}{EB}$组成，且满足：$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{EB}$，CD∥AO．DE∥OB，$OD\in[\frac{\sqrt{3}}{3}，\frac{\sqrt{6}}{3}]$（单位：km），设∠AOC=θ.

（1）用θ表示 CD 的长度，并求出θ的取值范围；

（2）当θ为何值时，观赏道路最长？



【考点】在实际问题中建立三角函数模型.

【分析】(1）根据三角形的角和边的关系，利用正弦定理，求得用θ表示 OD 和 CD 的长度，利用 CD 的取值范围，即可求得θ的取值范围；

（2）首先将道路长度 L（θ）表达成θ的函数关系式，再利用导数方法研究函数的最大值，从而可以求得$\theta=\frac{\pi}{6}$时，观光道路最长．.

【解答】解：(1）AE=EB，CD∥AO．DE∥OB，

$\therefore\angle AOD=\frac{\pi}{3}$，

于是在△OCD 中，OC=1，$\angle AOB=\frac{2\pi}{3}$，∠AOC=θ．$\angle COD=\frac{\pi}{3}-\theta$，

由正弦定理可知：$\frac{OD}{\sin\angle OCD}=\frac{CD}{\sin\angle COD}=\frac{OC}{\sin\angle CDO}=2R$，

$\frac{OD}{\sin\theta}=\frac{CD}{\sin(\frac{\pi}{3}-\theta)}=\frac{OC}{\sin\frac{2\pi}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore OD=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta$，$CD=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin(\frac{\pi}{3}-\theta)$，

$\because OD\in[\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3}]$，即$\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta\leqslant\frac{\sqrt{6}}{3}$，

$\therefore\frac{1}{2}\leqslant\sin\theta\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\because 0<\theta\leqslant\frac{\pi}{3}$，

$\therefore\frac{\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$，

故 $CD=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin(\frac{\pi}{3}-\theta)$，$(\frac{\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4})$，

（2）由（1）可知，观赏道理长 $L=2(\overset{\frown}{AC}+CD)=2\theta+\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin(\frac{\pi}{3}-\theta)$，$(\frac{\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4})$，

$\therefore L=2\theta+2\cos\theta-\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta$，

$L'=2-2\sin\theta-\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\theta$，

$=2-\frac{4\sqrt{3}}{3}\cos(\theta-\frac{\pi}{3})$，

$L'=0$，得 $\cos(\theta-\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\frac{\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$，$\theta=\frac{\pi}{6}$，

$\because$当$\frac{\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$时，$-\frac{\pi}{6}<\theta-\frac{\pi}{3}\leqslant-\frac{\pi}{12}$，

$L'=2-\frac{4\sqrt{3}}{3}\cos(\theta-\frac{\pi}{3})<0$，

$\therefore$当$\theta=\frac{\pi}{6}$时，L 取得最大值，即观赏道路最长．

19．已知公差不为 0 的等差数列$\{a_n\}$的首项为 1，前 n 项和为 S_n，且数列$\{\frac{S_n}{a_n}\}$是等差数列．

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设 $\lg b_n=\frac{a_n}{3^n}$（$n\in N^*$），问：b_1，b_k，b_m（k，m 均为正整数，且 $1<k<m$）能否成等比数列？若能，求出所有的 k 和 m 的值；若不能，请说明理由．

【考点】等差数列的通项公式；等比数列的通项公式．

【分析】（1）根据等差数列的定义与通项公式、前 n 项和公式，结合题意求出通项 a_n；

（2）假设存在正整数组 k 和 m，使 b_1、b_k，b_m 成等比数列，得出 lgb_1，lgb_klg，b_m 成等差数列，由此求出满足条件的正整数 k 和 m 的值．

【解答】解：（1）设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d（d≠0），

因为 $a_1=1$，所以 $a_2=1+d$，$a_3=1+2d$，从而 $S_2=2+d$，

$S_3=3+3d$，因为数列$\{\frac{S_n}{a_n}\}$是等差数列，

所以 $2\times\frac{S_2}{a_2}=\frac{S_1}{a_1}+\frac{S_3}{a_3}$，即$\frac{2(2+d)}{1+d}=1+\frac{3+3d}{1+2d}$，

化简得 $d^2-d=0$，而 d≠0，所以 d=1；

故 $a_n=a_1+(n-1)d=n$；

（2）假设存在正整数组 k 和 m，使 b_1、b_k、b_m 成等比数列，

则 lgb_1，lgb_k，lgb_m 成等差数列，

于是$\frac{2k}{3^k}=\frac{1}{3}+\frac{m}{3^m}$，

所以 $m=3^m\left(\frac{2k}{3^k}-\frac{1}{3}\right)$ …（*）；

易知 k=2，m=3 满足（*）；

因为 k≥3，且 $k\in N^*$时，$\frac{2(k+1)}{3^{k+1}}-\frac{2k}{3^k}=\frac{2-4k}{3^{k+1}}<0$；

数列$\{\frac{2k}{3^k}\}$（k≥3，k∈N）为递减数列，

于是$\frac{2k}{3^k}-\frac{1}{3}\leqslant\frac{2\times3}{3^3}-\frac{1}{3}<0$，

所以，当 k≥3 时，不存在正整数 k 和 m 满足（*）；

综上，当且仅当 k=2，m=3 时，b_1，b_k，b_m 成等比数列．

20．设 a 为正实数，函数 f（x）=ax，g（x）=lnx．

（1）求函数 h（x）=f（x）•g（x）的极值；

（2）证明：$\exists x_0\in R$，使得当 $x>x_0$ 时，f（x）>g（x）恒成立．

【考点】利用导数求闭区间上函数的最值；利用导数研究函数的极值．

【分析】（1）首先求出函数的导数，然后根据导数与单调区间的关系确定函数的单调区间，从而求出函数的极值即可；

（2）先求出当直线和 y=lnx 相切时 a 的取值，然后进行讨论求解即可．

【解答】解：（1）h（x）=ax•lnx，（a>0），

则 h′（x）=a（lnx+1），

令 h′（x）>0，解得：$x>\frac{1}{e}$，

令 h′（x）<0，解得：$0<x<\frac{1}{e}$，

∴h（x）在（0，$\frac{1}{e}$）递减，在（$\frac{1}{e}$，+∞）递增，

∴h（x）$_{极小值}$=h（$\frac{1}{e}$）=﹣$\frac{a}{e}$，无极大值；

（2）g（x）=lnx，f（x）=ax，（x＞0），（a＞0）

则 g′（x）=$\frac{1}{x}$，当 g（x）与 f（x）相切时，设切点为（m，lnm），

则切线斜率 k=$\frac{1}{m}$，

则过原点且与 g（x）相切的切线方程为 y﹣lnm=$\frac{1}{m}$（x﹣m）=$\frac{1}{m}$x﹣1，

即 y=$\frac{1}{m}$x﹣1+lnm，

∵g（x）=ax，

∴$\begin{cases}\frac{1}{m}=a\\-1+\ln m=0\end{cases}$，得 m=e，a=$\frac{1}{e}$.

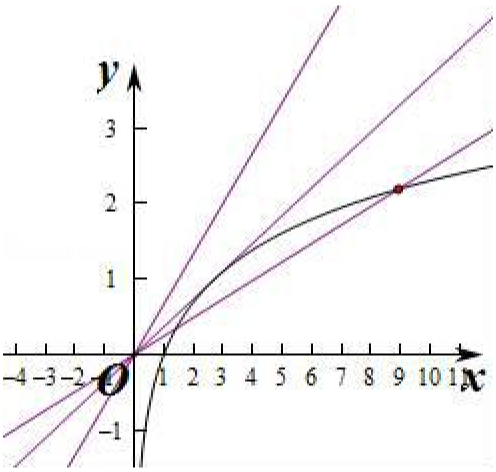
即当 a＞$\frac{1}{e}$时，ax＞lnx 恒成立.

当 a=$\frac{1}{e}$时，当 x_0≥$\frac{1}{e}$时，

要使 ax＞lnx 恒成立．得当 x＞x_0 时，ax＞lnx 恒成立.

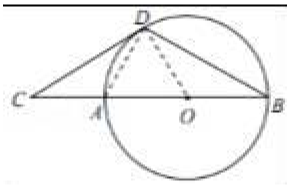
当 0＜a＜$\frac{1}{e}$时，g（x）与 f（x）有两个不同的交点，不妨设较大的根为 x_1，当 x_0≥x_1 时，当 x＞x_0 时，ax＞lnx 恒成立.

∴∀a＞0，∃x_0∈R，使得当 x＞x_0 时，f（x）＞g（x）恒成立.



四、选做题从 21-24 题中任选 2 个小题，每小题 10 分，共 20 分

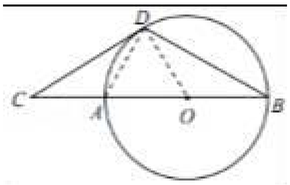
21．如图，AB 是圆 O 的直径，D 为圆 O 上一点，过 D 作圆 O 的切线交 BA 的延长线于点 C，若 DB=DC，求证：CA=AO．



【考点】与圆有关的比例线段．

【分析】连结 OD、AD，证出△ADB≌△ODC，得到 AB=CO，从而证出结论．

【解答】证明：如图示：



，

连结 OD、AD，

∵AB 是圆 O 的直径，

∴∠ADB=90°，AB=2AO，

∵DC 是⊙O 的切线，

∴∠CDO=90°，

∵DB=DC，

∴∠B=∠C，

∴△ADB≌△ODC，

∴AB=CO，

即 2OA=OA+CA，

∴CA=AO．

22．已知矩阵 A=$\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$，B=$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 6\end{bmatrix}$，求矩阵 $A^{-1}B$．

【考点】几种特殊的矩阵变换．

【分析】设矩阵 A－1=$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$，通过 AA^{-1} 为单位矩阵可得 A^{-1}，进而可得结论．

【解答】解：设矩阵 A 的逆矩阵为$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$，

则$\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，即$\begin{bmatrix}-a & -b\\ 2c & 2d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，

故 a=－1，b=0，c=0，d=$\frac{1}{2}$，

从而 $A^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$，

∴$A^{-1}B=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 0 & 3\end{bmatrix}$．

23．已知圆 C 的极坐标方程为$\rho^2+2\sqrt{2}\rho\sin(\theta-\frac{\pi}{4})-4=0$，求圆心的极坐标．

【考点】简单曲线的极坐标方程．

【分析】圆 C 的极坐标方程为$\rho^2+2\sqrt{2}\rho\sin(\theta-\frac{\pi}{4})-4=0$，展开为：$\rho^2+2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}(\rho\sin\theta-\rho\cos\theta)-4=0$，利用$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\\ \rho^2=x^2+y^2\end{cases}$即可得出．

【解答】解：∵圆 C 的极坐标方程为$\rho^2+2\sqrt{2}\rho\sin(\theta-\frac{\pi}{4})-4=0$，

展开为：$\rho^2+2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}(\rho\sin\theta-\rho\cos\theta)-4=0$，

∴$x^2+y^2+2y-2x-4=0$，配方为$(x-1)^2+(y+1)^2=6$．

可得圆心坐标（1，－1），化为极坐标$(\sqrt{2},\frac{7\pi}{4})$．

24．设 a，b 是非负实数，求证：$a^3+b^3\geqslant\sqrt{ab}(a^2+b^2)$．

【考点】分析法和综合法．

【分析】作差，再进行因式分解，分类讨论，即可证得结论．

【解答】证明：由 a，b 是非负实数，作差得

$a^3+b^3-\sqrt{ab}(a^2+b^2)=a^2\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b})+b^2\sqrt{b}(\sqrt{b}-\sqrt{a})$

$=(\sqrt{a}-\sqrt{b})[(\sqrt{a})^5-(\sqrt{b})^5]$．

当 $a\geqslant b$ 时，$\sqrt{a}\geqslant\sqrt{b}$，从而$(\sqrt{a})^5\geqslant(\sqrt{b})^5$，得$(\sqrt{a}-\sqrt{b})[(\sqrt{a})^5-(\sqrt{b})^5]\geqslant0$；

当 $a<b$ 时，$\sqrt{a}<\sqrt{b}$，从而$(\sqrt{a})^5<(\sqrt{b})^5$，得$(\sqrt{a}-\sqrt{b})[(\sqrt{a})^5-(\sqrt{b})^5]>0$．

所以$a^3+b^3\geqslant\sqrt{ab}(a^2+b^2)$．

25．一批产品共 10 件，其中 3 件是不合格品，用下列两种不同方式从中随机抽取 2 件产品检验：

方式一：一次性随机抽取 2 件；

方式二：先随机抽取 1 件，放回后再随机抽取 1 件；

记抽取的不合格产品数为ξ．

（1）分别求两种抽取方式下ξ的概率分布；

（2）比较两种抽取方式抽到的不合格品平均数的大小？并说明理由．

【考点】离散型随机变量及其分布列；离散型随机变量的期望与方差．

【分析】（1）方式一中随机变量ξ可取的值为 0，1，2，且ξ服从超几何分布$\xi\sim H(2,3,10)$，计算对应的概率；列出频率分布表；方式二中随机变量ξ可取的值为 0，1，2，且ξ服从二项分布$\xi\sim B(2,\frac{3}{10})$，计算对应的概率；列出频率分布表；

（2）计算方式一与方式二中的数学期望（平均数），比较结果即可．

【解答】解：（1）方式一中随机变量ξ可取的值为 0，1，2，且ξ服从超几何分布，$\xi\sim H(2,3,10)$，

于是 P（ξ=0）$=\frac{C_3^0 \cdot C_7^2}{C_{10}^2}=\frac{7}{15}$；P（ξ=1）$=\frac{C_3^1 \cdot C_7^1}{C_{10}^2}=\frac{7}{15}$；P（ξ=2）$=\frac{C_3^2 \cdot C_7^0}{C_{10}^2}=\frac{1}{15}$；

因此ξ的频率分布可表示为下表：

ξ	0	1	2
P	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$

方式二中随机变量ξ可取的值为 0，1，2，且ξ服从二项分布，ξ～B（2，$\frac{3}{10}$），于是 P（ξ=0）$=C_2^0 \cdot (\frac{3}{10})^0 \cdot (\frac{7}{10})^2=\frac{49}{100}$；P（ξ=1）$=C_2^1 \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{10}=\frac{21}{50}$；P（ξ=2）$=C_2^2 \cdot (\frac{3}{10})^2 \cdot (\frac{7}{10})^0$；

因此ξ的频率分布可表示为下表：

ξ	0	1	2
P	$\frac{49}{100}$	$\frac{21}{50}$	$\frac{9}{100}$

（2）由（1）知，方式一中ξ的数学期望（平均数）为 E（ξ）$=0\times\frac{7}{15}+1\times\frac{7}{15}+2\times\frac{1}{15}=\frac{3}{5}$，

方式二中ξ的数学期望（平均数）为 E（ξ）$=2\times\frac{3}{10}=\frac{3}{5}$，

所以，两种方式抽到的不合格品平均数相等．

26．在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 C：$y^2=4x$，设点 A（﹣t，0），B（t，0）（t＞0），过点 B 的直线与抛物线 C 交于 P，Q 两点，（P 在 Q 的上方）．

（1）若 t=1，直线 PQ 的倾斜角为$\frac{\pi}{4}$，求直线 PA 的斜率；

（2）求证：∠PAO=∠QAO．

【考点】抛物线的简单性质．

【分析】（1）由题意写出直线 PQ 的方程，和抛物线联立，求得 P 的坐标，代入斜率公式得答案；

（2）设直线 PQ 的方程为 x=my+t，联立直线方程和抛物线方程求得 P，Q 的坐标，由斜率公式求得 $k_{PA}=-k_{QA}$，从而得到∠PAO=∠QAO．

【解答】（1）解：若 t=1，直线 PQ 的倾斜角为$\frac{\pi}{4}$，则直线 PQ 的方程为 y=x﹣1，

解方程组$\begin{cases}y=x-1\\y^2=4x\end{cases}$，得 P（$3+2\sqrt{2}$，$2+2\sqrt{2}$），

∵A（﹣1，0），∴直线 PA 的斜率 $k_{PA}=\frac{2+2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}-(-1)}=\frac{\sqrt{2}}{2}$；

（2）证明：∵直线 PQ 过点 B（t，0），且与抛物线相交于 P，Q 两点，

∴可设直线 PQ 的方程为 x=my+t，

联立方程组$\begin{cases}y^2=4x\\x=my+t\end{cases}$，得 $y^2-4my-4t=0$．

解得：$y=2m\pm2\sqrt{m^2+t}$，

于是 P（$2m^2+2m\sqrt{m^2+t}+t$，$2m+2\sqrt{m^2+t}$），

Q（$2m^2-2m\sqrt{m^2+t}+t$，$2m-2\sqrt{m^2+t}$），

∴直线 PA 的斜率 $k_{PA}=\frac{2m+2\sqrt{m^2+t}}{2m^2+2m\sqrt{m^2+t}+t-(-t)}=\frac{m+\sqrt{m^2+t}}{m^2+m\sqrt{m^2+t}+t}=\frac{1}{\sqrt{m^2+t}}$，

同理，直线 QA 的斜率 $k_{QA}=\frac{2m-2\sqrt{m^2+t}}{2m^2-2m\sqrt{m^2+t}+t-(-t)}=-\frac{1}{\sqrt{m^2+t}}$，

可得 $k_{PA}=-k_{QA}$，则：∠PAO=∠QAO．