

数学试题参考答案及评分标准（理科）

一、选择题

1. A 2. C 3. C 4. B 5. C 6. B 7. B 8. C 9. A 10. A 11. C 12. D

二、填空题

13. 48 14. 48 15. 9 16. $\frac{1}{2}$

三、解答题

17. 由已知得 $\begin{cases} 0 \leq x \leq 8 \\ 0 \leq x-2 \leq 8 \end{cases} \therefore 2 \leq x \leq 8 \quad \textcircled{1} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$ 原不等式化为 $\frac{8!}{(8-x)!} < 6 \times \frac{8!}{(10-x)!} \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$ $\therefore 1 < \frac{6}{(10-x)(9-x)} \quad \text{即} \quad x^2 - 19x + 84 < 0 \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$ 解得 $7 < x < 12 \quad \textcircled{2} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$ 由 $\textcircled{1}\textcircled{2}$ 知 $7 < x \leq 8 \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$ 又 $\because x \in N \quad \therefore \text{原不等式的解集为 } \{8\} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$ 18. (1) 由分布列的性质知 $\begin{cases} a+0.1+0.6=1 \\ 0.3+b+0.3=1 \end{cases} \quad \text{得} \quad a=0.3, \quad b=0.4 \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$ (2) $E\xi = 1 \times 0.3 + 2 \times 0.1 + 3 \times 0.6 = 2.3$ $E\eta = 1 \times 0.3 + 2 \times 0.4 + 3 \times 0.3 = 2 \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$ $D\xi = (1-2.3)^2 \times 0.3 + (2-2.3)^2 \times 0.1 + (3-2.3)^2 \times 0.6 = 0.81$ $D\eta = (1-2)^2 \times 0.3 + (2-2)^2 \times 0.4 + (3-2)^2 \times 0.3 = 0.6 \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$ 由计算结果知 $E\xi > E\eta$ ，说明在一次射击中甲的平均得分比乙高；但由 $D\xi > D\eta$ ，说明甲得分的稳定性不如乙因而甲乙两人的技术都不够全面。 $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

19. (1) 由已知得

$$\begin{cases} 2^n = 1024 \\ 1 + C_n^1 p + C_n^2 p^2 = 201 \end{cases} \quad \therefore n = 10, p = -\frac{20}{9} \text{ (舍去) 或 } p = 2$$

$$\therefore n = 10, p = 2 \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2) 设 $(1+2x)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{10}x^{10}$

令 $x = 1$ 得 $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = 3^{10}$ ①

令 $x = -1$ 得 $a_0 - a_1 + a_2 - \dots - a_{10} = 1$ ②

(①—②) / 2 得 $a_1 + a_3 + \dots + a_9 = \frac{3^{10} - 1}{2} = 29524 \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

(3) 设 $(1+2x)^{10}$ 展开式中系数最大的项为 T_{r+1} , 则 $T_{r+1} = C_{10}^r (2x)^r$ 的系数为 $C_{10}^r 2^r$

则 $\begin{cases} C_{10}^r \cdot 2^r \geq C_{10}^{r-1} \cdot 2^{r-1} \\ C_{10}^r \cdot 2^r \geq C_{10}^{r+1} \cdot 2^{r+1} \end{cases}$ 解得 $\frac{19}{3} \leq r \leq \frac{22}{3}$

又 $\because r \in N$, $\therefore r = 7$,

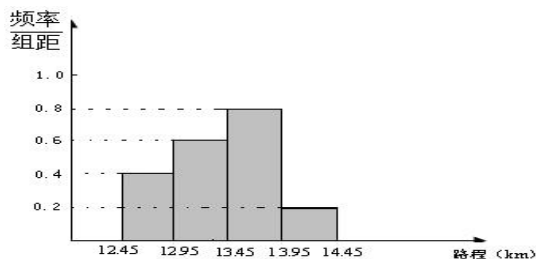
因此, 展开式中系数最大的项为 $T_8 = C_{10}^7 (2x)^7 = 15360x^7 \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

20. (1) 频率分布表:

分组	频数	频率
[12.45, 12.95)	2	0.2
[12.95, 13.45)	3	0.3
[13.45, 13.95)	4	0.4
[13.95, 14.45)	1	0.1
合计	10	1.0

$\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

(2) 频率直方图



$\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

组距为 0.5, 故估计总体数据落在 $[12.95, 13.95]$ 中的概率为 $0.3+0.4=0.7$ 。

.....9 分

$$(3) \quad \bar{x} = \frac{13.7+12.7+\cdots+13.4}{10} = 13.4, \text{ 由此估计总体的平均值为 } 13.4$$

.....12 分

21. 假设存在等差数列 $\{a_n\}$ 满足题意, 则取 n 分别等于 1、2、3、4 得

$$\begin{cases} C_1^0 + \frac{C_1^1}{a_1} = \frac{2^{1+1}-1}{1+1} \\ C_2^0 + \frac{C_2^1}{a_1} + \frac{C_2^2}{a_2} = \frac{2^{2+1}-1}{2+1} \\ C_3^0 + \frac{C_3^1}{a_1} + \frac{C_3^2}{a_2} + \frac{C_3^3}{a_3} = \frac{2^{3+1}-1}{3+1} \\ C_4^0 + \frac{C_4^1}{a_1} + \frac{C_4^2}{a_2} + \frac{C_4^3}{a_3} + \frac{C_4^4}{a_4} = \frac{2^{4+1}-1}{4+1} \end{cases} \quad \text{.....2 分}$$

求得 $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 4, a_4 = 5$,4 分

猜想 $a_n = n+1, (n \in N_+)$ 6 分

$$\text{下面证明: } \because C_{n+1}^{k+1} = \frac{n+1}{k+1} C_n^k, \quad \therefore \frac{C_n^k}{k+1} = \frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1}, \text{ 即 } \therefore \frac{C_n^k}{a_k} = \frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1}$$

$\therefore$ 等式左边

$$\begin{aligned} &= C_n^0 + \frac{C_{n+1}^2}{n+1} + \frac{C_{n+1}^3}{n+1} + \cdots + \frac{C_{n+1}^{n+1}}{n+1} = C_n^0 + \frac{1}{n+1} (C_{n+1}^2 + C_{n+1}^3 + \cdots + C_{n+1}^{n+1}) \\ &= C_n^0 + \frac{1}{n+1} [(C_{n+1}^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + C_{n+1}^3 + \cdots + C_{n+1}^{n+1}) - C_{n+1}^0 - C_{n+1}^1] \\ &= 1 + \frac{1}{n+1} [2^{n+1} - 1 - (n+1)] = \frac{2^{n+1}-1}{n+1} = \text{右边。} \quad \text{.....10 分} \end{aligned}$$

因此, 存在等差数列 $a_n = n+1, (n \in N_+)$ 满足题意。12 分

22. : 系统一的可靠性为 $P_1 = P(A_1 \cdot A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2) \cdots P(A_n) = r^n \cdots \cdots 1$ 分

系统二的可靠性为

$$P_2 = 1 - [1 - P(A_1 \cdot A_2 \cdots A_n)][1 - P(B_1)P(B_2) \cdots P(B_n)]$$

$$= 1 - (1 - r^n)(1 - r^n) = 2r^n - r^{2n} \cdots \cdots 2 \text{ 分}$$

系统三的可靠性为

$$P_3 = \{1 - [1 - P(A_1)][1 - P(B_1)]\} \cdot \{1 - [1 - P(A_2)][1 - P(B_2)]\} \cdots$$

$$\cdots \{1 - [1 - P(A_n)][1 - P(B_n)]\}$$

$$= [1 - (1 - r)^2]^n = (2r - r^2)^n \cdots \cdots 3 \text{ 分}$$

$$\because 0 < r < 1, \therefore P_2 - P_1 = r^n(1 - r^n) > 0, \therefore P_2 > P_1 \cdots \cdots 4 \text{ 分}$$

$$P_3 - P_1 = r^n[(2 - r)^n - 1] > r^n[(2 - 1)^n - 1] = 0 \therefore P_3 > P_1 \cdots \cdots 5 \text{ 分}$$

下面比较 P_3 与 P_2 的大小

当 $n = 1$ 时, $P_3 = P_2$; 当 $n = 2$ 时, $P_3 > P_2$ 猜想当 $n \geq 2$ 时, $P_3 > P_2 \cdots \cdots 7$ 分

事实上, 假设当 $n = k$ 时, $P_3 > P_2$ 成立, 即 $P_3 - P_2 = r^k[(2 - r)^k - (2 - r^k)] > 0$,

$$\text{则当 } n = k + 1 \text{ 时, } P_3 - P_2 = r^{k+1}[(2 - r)^{k+1} - (2 - r^{k+1})] = r^{k+1}[(2 - r)^{k+1} - (2 - r^{k+1})]$$

$$= r(2 - r) \cdot r^k[(2 - r)^k - (2 - r^k)] + 2r^{k+1}(1 - r)(1 - r^k) \cdots \cdots 10 \text{ 分}$$

由归纳假设 $r^k[(2 - r)^k - (2 - r^k)] > 0$, 又 $\because 0 < r < 1$,

$$\therefore 2 - r > 0, (1 - r) > 0, (1 - r^k) > 0 \cdots \cdots 12 \text{ 分}$$

即当 $n = k + 1$ 时, $P_3 - P_2 > 0$

因此对任意的 $n > 1$ 且 $n \in N_+$, 都有 $P_3 > P_2 \cdots \cdots 14$ 分