2013-2014 学年度上学期期末考试 14 年级

数学（理）科试卷答案

一、选择题 1~6 ADBDBB 7~12 BCCBCD

二、填空题 13、 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ 14、11 15、 $\frac{2n}{n+2}$ 16、 $[\frac{2}{3}, \frac{3}{2}]$

三、解答题 17、解：由已知： $f(x) = \sin \omega x - \cos \omega x = \sqrt{2} \sin(\omega x - \frac{\pi}{4})$2

(1)若 $\omega = \frac{1}{2}$ 则 $f(x) = \sqrt{2} \sin(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4})$ ，又 $x \in R$ 则 $\sqrt{2} \sin(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}) \leq \sqrt{2}$

$\therefore f(x)_{\max} = \sqrt{2}$ ，此时 $\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ 即 $x \in \{x | x = 4k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in Z\}$

.....7

(2) $\because x = \frac{\pi}{8}$ 是函数的 $f(x)$ 的一个零点， $\therefore \sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{8}\omega - \frac{\pi}{4}) = 0 \therefore \frac{\pi}{8}\omega - \frac{\pi}{4} = k\pi$ ，

$k \in Z$ 又 $0 < \omega < 10$ ， $\omega = 2 \therefore f(x) = \sqrt{2} \sin(2x - \frac{\pi}{4})$ ，此时其最小正周期为 π ...12

18.解：(1) 第 6 小组的频率为：1 - (0.04+0.10+0.14+0.28+0.30) = 0.14

则此次测试总人数为 50 人，又第四、五、六组成绩均合格，所以合格的人数为

50 (0.28+0.30+0.14) = 36 人4

(2) $X \in \{0,1,2\}$ ，此时测试成绩不合格的概率为 $\frac{14}{50} = \frac{7}{25}$ 由已知： $X \sim B(2, \frac{7}{25})$6

$$\therefore P(X = 0) = \left(\frac{18}{25}\right)^2 = \frac{324}{625} \quad P(X = 1) = C_2^1 \left(\frac{18}{25}\right) \left(\frac{7}{25}\right) = \frac{252}{625}$$

$$P(X = 2) = C_2^0 \left(\frac{7}{25}\right)^2 = \frac{49}{625} \text{ 则所求分布列为}$$

X	0	1	2
P	$\frac{324}{625}$	$\frac{252}{625}$	$\frac{49}{625}$

$$\therefore E(x) = 2 \times \frac{7}{25} = \frac{14}{25} \dots\dots\dots 12$$

19 解: (1) $\because M$ 是AD的中点且AD = 2 $\therefore MD = 1$ 又 $\because AD \parallel BC, BC = 1$

$\therefore$ MBCD为平行四边形 $\therefore \angle ADC = 90^\circ, DC \parallel MB, \therefore \angle AMB = 90^\circ$ 即BM $\perp$ AD

$\because$ 平面PAD $\perp$ 平面ABCD, BM $\subset$ 平面ABCD $\therefore$ BM $\perp$ 面PAD

$\therefore$ 平面EBM $\perp$ 面PAD.....4

(2) $\because \triangle PAD$ 是正三角形M为AD中点 $\therefore PM \perp AD$ 又 $\because$ 平面PAD $\perp$ 平面ABCD

$\therefore PM \perp$ 平面ABCD 如图: 以 M 为原点以 MA、MB、MP 所在直线为 x、y、z 轴建立

空间直角坐标系 M-xyz, 则 A (1, 0, 0) B (0, $\sqrt{3}$, 0) P (0, 0, $\sqrt{3}$) C (-1, $\sqrt{3}$, 0)

$\vec{PC} = (-1, \sqrt{3}, -\sqrt{3}) \therefore E$ 在PC上 $\therefore$ 设 $\vec{CE} = \lambda \vec{CP} (0 < \lambda < 1) \therefore \vec{ME} - \vec{MC} = \lambda (\vec{MP} - \vec{MC})$

$$\therefore \vec{ME} = (\lambda - 1, \sqrt{3} - \sqrt{3}\lambda, \sqrt{3}\lambda) \therefore \vec{ME} \cdot \vec{PC} = 0 \therefore \lambda = \frac{4}{7} \therefore \vec{ME} = (-\frac{3}{7}, \frac{3\sqrt{3}}{7}, \frac{4\sqrt{3}}{7})$$

设平面 MBE 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$ 则 $\therefore \vec{ME} \cdot \vec{n} = 0, \therefore \vec{MB} \cdot \vec{n} = 0$, 即

$$\begin{cases} -\sqrt{3}x + 3y + 4z = 0 \\ \sqrt{3}y = 0 \end{cases}$$

令 $x = 4 \therefore \vec{n} = (4, 0, \sqrt{3})$ 又平面 PMB 的法向量为 $\vec{n}_1 = (1, 0, 0)$

$$\therefore \cos \langle \vec{n}, \vec{n}_1 \rangle = \frac{4}{\sqrt{16+3}} = \frac{4\sqrt{19}}{19}$$
 设平面 PMB 与平面 EMB 所成角为 θ , 则

$$\therefore \cos \theta = \frac{4\sqrt{19}}{19} \dots\dots\dots 12$$

20、解：(1) 设 $F(c,0)$ ，则 $|MF| = \sqrt{(x_1 - c)^2 + y_1^2}$

又 $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ 则 $y_1^2 = (1 - \frac{x_1^2}{a^2})b^2$

所以 $|MF| = \sqrt{(1 - \frac{b^2}{a^2})x_1^2 - 2cx_1 + a^2} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x_1^2 - 2cx_1 + a^2}$

$= \sqrt{(ex_1 - a)^2} \because -a \leq x_1 \leq a$ 且 $0 < e < 1$

$|MF| = a - ex_1$ 且

$|MF|_{\max} = a + ae, |MF|_{\min} = a - ae$ 5

(2) 设 $B(x_2, y_2)$ ($x_1, x_2 > 0$) 在 ΔOQA 中

$|AQ|^2 = x_1^2 + y_1^2 - b^2$ 又 $y_1^2 = (1 - \frac{x_1^2}{a^2})b^2$

$|AQ|^2 = \frac{c^2 x_1^2}{a^2}$ 则 $|AQ| = \frac{cx_1}{a}$ 同理 $|BQ| = \frac{cx_2}{a}$

$|AB| + |AF| + |BF| = 2a - (\frac{c}{a}x_1 + \frac{c}{a}x_2) + \frac{c}{a}x_1 + \frac{c}{a}x_2 = 2a$

又 $a = 2$ 所以所求周长为 412

21、解： $\because f(x) = x \ln x$ 则其导数 $f'(x) = \ln x + 1$ ($x > 0$)

$\therefore x \in (0, \frac{1}{e})$ 时导数 $f'(x) < 0$ ，此时 $f(x)$ 在 $x \in (0, \frac{1}{e})$ 上单调递减

$x \in (\frac{1}{e}, +\infty)$ 时导数 $f'(x) > 0$ $f(x)$ 在 $x \in (\frac{1}{e}, +\infty)$ 上单调递增3

(2) 证明：当 $0 < x \leq 1$ 时 $f(x) \leq 0$ 又 $t > 0$ 令 $h(x) = f(x) - t$ ， $x \in [1, +\infty)$

由 (1) 知 $h(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 为增函数， $h(1) = -t < 0$ ， $h(e^t) = t(e^t - 1) > 0$

∴ 存在唯一的 m , 使 $t = f(m)$ 成立7

(3) 证明: ∵ $m = g(t)$ 且由 ②) $t = f(m), t > e$

当 $t > e$ 时, 若 $m = g(t) \leq e$ 则由 $f(m)$ 单调性有 $t = f(m) \leq f(e) = e$ 矛盾

∴ $m > e$,

$$\text{又 } \frac{\ln g(t)}{\ln t} = \frac{\ln m}{\ln f(m)} = \frac{\ln m}{\ln(m \ln m)} = \frac{\ln m}{\ln m + \ln(\ln m)} = \frac{u}{u + \ln u}$$

其中 $u = \ln m, u > 1$, 要使 $\frac{7}{10} < \frac{\ln g(t)}{\ln t} < 1$ 成立只需 $0 < \ln u < \frac{3}{7}u$,

$$\text{令 } F(u) = \ln u - \frac{3}{7}u, (u > 1), F'(u) = \frac{1}{u} - \frac{3}{7}$$

当 $1 < u < \frac{7}{3}$ 时 $F'(u) > 0$, $F(u)$ 单增, $u > \frac{7}{3}$ 时 $F'(u) < 0$, $F(u)$ 单减

∴ 对 $u > 1, F(u) \leq F(\frac{7}{3}) < 0$ 即 $\ln u < \frac{3}{7}u$ 成立

综上当 $t > e$ 时, $\frac{7}{10} < \frac{\ln g(t)}{\ln t} < 1$ 成立。12

22 、 (1) 证 明 : 连 接 AD 则 $\angle ACD = \angle ADC$,

∵ $CE = AE$ ∴ $\angle ACD = \angle EAC$ ∴ $\triangle AEC$ 与 $\triangle CAD$ 相似 ∴ $\frac{AC}{CD} = \frac{CE}{AC}$ ∴ $AC^2 = CD \cdot CE$...

.....5

$$(2) CA = 5, AE = 3 \therefore CE = 3, CD = \frac{25}{3} \therefore CF = \frac{1}{2}CD = \frac{25}{6}$$

$$\text{则 } EF = \frac{7}{6} \therefore \sin \angle EAF = \frac{\frac{7}{6}}{\frac{25}{6}} = \frac{7}{25} \dots\dots\dots 10$$

23 、 解 (1) 曲 线 C 的 普 通 方 程 为 $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{4} = 1$ 直 线 L 的 参 数 方 程 为

$$\begin{cases} x = 8 + t \cos \alpha \\ y = 2 + t \sin \alpha \end{cases} (\alpha \text{ 为 参 数}) \dots\dots\dots 4$$

(2) 将 L 的 参 数 方 程 为 代 入 曲 线 C 的 方 程 得 :

$$(8 + t \cos \alpha)^2 + 8(2 + t \sin \alpha)^2 = 32$$

整理得 $(8\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) t^2 + (16 \cos \alpha + 32 \sin \alpha)t + 64 = 0$

$$\therefore |PM_1| \cdot |PM_2| = t_1 t_2 = \frac{64}{1 + 7 \sin^2 \alpha} \in [8, 64] \dots \dots \dots 10$$

24、解：(1) 原不等式可化为 $|2x - a| \leq 6 - a \therefore \begin{cases} 6 - a \geq 0 \\ a - 6 \leq 2x - a \leq 6 - a \end{cases}$

$$\therefore a - 3 \leq x \leq 3(a \leq 6)$$

又原不等式解集为 $\{x \mid -2 \leq x \leq 3\} \therefore a - 3 = -2 \quad \text{即 } a = 1 \dots \dots \dots 4$

(2) $\therefore f\left(\frac{t}{2}\right) \leq m - f(-t) \therefore |t-1| + |2t+1| + 2 \leq m \therefore y = |t-1| + |2t+1| + 2$

$$= \begin{cases} -3t+2, & t \leq -\frac{1}{2} \\ t+4, & -\frac{1}{2} < t < 1 \\ 3t+2, & t \geq 1 \end{cases} \therefore y_{\min} = \frac{7}{2} \quad \therefore m \geq \frac{7}{2} \dots \dots \dots 10$$