-高考数学模拟试卷（文科）（5 月份）

一、选择题（共 8 小题，每小题 5 分，满分 40 分）

1．i 是虚数单位，则$\frac{2i}{1+3i}$=（　　）

A．$-\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$ B．$\frac{3}{4}-\frac{1}{4}i$ C．$\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$ D．$\frac{3}{4}+\frac{1}{4}i$

2．方程 $e^x=2-x$ 的根位于（　　）

A．（﹣1，0） B．（0，1） C．（1，2） D．（2，3）

3．下列说法正确的是（　　）

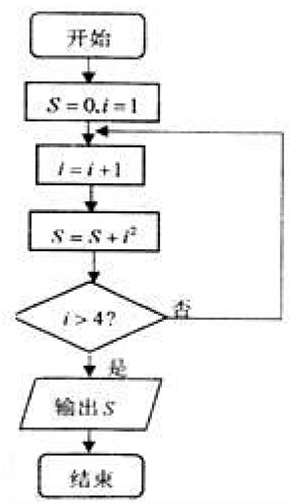
A．命题"$\exists x_0\in R$，$2^{x_0}>1$"的否定是"$\forall x\in R$，$2^x\leqslant 1$"

B．命题"若 x=y，则 $x^2=y^2$"的否命题是"若 x=y，则 $x^2\neq y^2$"

C．p：$\forall x\in R$，$x^2+1\geqslant 1$，q：在△ABC 中，若 sinA=$\frac{1}{2}$，则 A=$\frac{\pi}{6}$，则 p∧q 为真命题

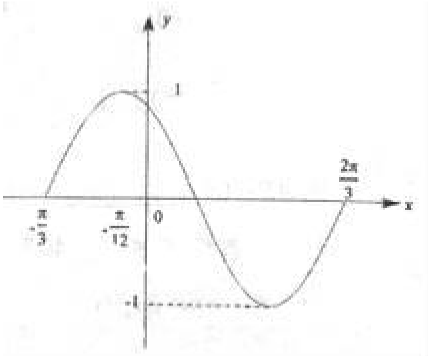
D．若平面α⊥平面β，直线 a⊂α，直线 b⊂β，则 a⊥b

4．阅读如图的框图，则输出的 S=（　　）



A．30 B．29 C．55 D．54

5．如图是函数 y=Asin（ωx+φ）（x∈R）在区间[$-\frac{\pi}{3}$，$\frac{2\pi}{3}$]上的图象，为了得到这个函数的图象．只需将 y=cosx（x∈R）的图象上的所有点（　　）



A．向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，再把所有点的横坐标扩大到原来的 2 倍

B．向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度．再把所有点的横坐标扩大到原来的 2 倍

C．把所有点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$，再向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度

D．把所有点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$，再向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度

6．若实数 a，b，c 满足 $2^a=\frac{1}{a}$，$\log_2 b=\frac{1}{b}$，$\ln c=\frac{1}{c}$，则（　　）

A．a＜c＜b B．a＜b＜c C．b＜c＜a D．c＜b＜a

7．抛物线 C：$x^2=2py$（p＞0）的焦点为 F，l 为 C 的准线，P∈C．且|PF|=6，过 P 作 l 的垂线，垂足为 M，若△FMP 为正三角形，则 p=（　　）

A．2　B．3　C．4　D．5

8．函数 f（x）=$\begin{cases}0, & x\in\{0, 4\}\\ x^2-2x+3, & 0<x\leqslant 2\\ |x-3|, & 2<x<4\end{cases}$，若 f（x）=kx 有三个不同的根，则实数 k 的取值范围是（　　）

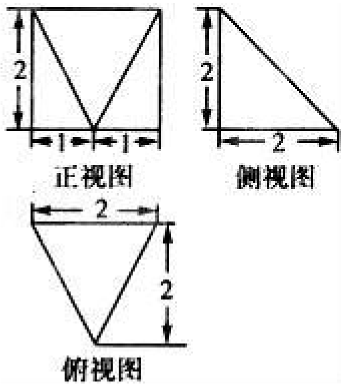
A．$(0, \frac{1}{4})\cup(2\sqrt{3}-2, \frac{3}{2}]$　B．$[0, \frac{1}{4})\cup(2\sqrt{3}-2, \frac{3}{2}]$　C．$[0, \frac{1}{4}]\cup(2\sqrt{3}-2, \frac{3}{2}]$ D．$(0, \frac{1}{4}]\cup(2\sqrt{3}-2, \frac{3}{2}]$

二、填空题（共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分）

9．某单位生产甲，乙，丙三种不同型号的产品，甲乙丙三种产品数量之比为 3：4：5，现用分层抽样的方法抽出一个容量为 96 的样本，则乙种型号的产品数量为________．

10．设集合 P={x∈N|x≤8}，Q={x∈R||x﹣1|≤2}，则 P∩Q=________．

11．一个几何体的三视图如图，则该几何体的体积为________．



12．圆 $x^2-2ax+y^2=4-a^2$ 在 y 轴上的截距为 2，则实数 a=________．

13．已知 x＞0，y＞0，且 $\frac{1}{3x+y}+\frac{2}{x+2y}=2$，则 x+y 的最小值是________．

14．平行四边形 ABCD 中，$|AB|=2$，$|BC|=\sqrt{2}$，∠DAB=60°，$\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EB}$，

则 $\overrightarrow{AE}\bullet\overrightarrow{AF}$=________．

三、解答题（共 6 小题，满分 80 分）

15．（13 分）在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别是 a，b，c，已知 $\cos A=-\frac{4}{5}$，b=2，a=3．

（1）求 sinB 的值；

（2）求 $\sin(2B-\frac{\pi}{6})$ 的值．

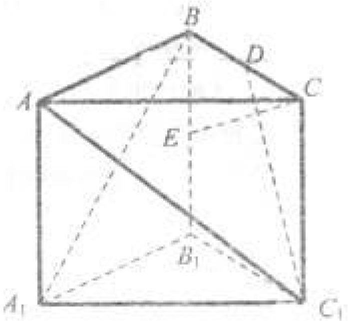
16．（13 分）某公司计划在甲、乙两个仓储基地储存总量不超过 300 吨的一种紧缺原材料，总费用不超过 9 万元，此种原材料在甲、乙两个仓储基地的储存费用分别为 500 元/吨和 200 元/吨，假定甲、乙两个仓储基地储存的此种原材料每吨能给公司带来的收益分别为 0.3 万元和 0.2 万元．问该公司如何分配在甲、乙两个仓储基地的储存量，才能使公司的收益最大，最大收益是多少万元？

17．（13 分）在棱长为 2 的正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D，E 分别是 BC，BB_1 的中点．

（1）求证：$A_1B\parallel AC_1D$

（2）求证：$CE\perp$ 面 AC_1D

（3）求二面角 $C-AC_1-D$ 的正弦值．



18．（13 分）在公比为 m 的等比数列{a_n}中，$a_3=2$，$a_1+a_2+a_3=6$.

（1）求 m.

（2）求{na_n}的前 n 项和 T_n.

19．（14 分）椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）的离心率为$\frac{\sqrt{6}}{3}$，各个顶点围成的菱形面积为 $2\sqrt{3}$.

（1）求 C 的方程；

（2）过右顶点 A 的直线 l 交椭圆 C 于 A，B 两点.

①若|AB|=$\frac{4\sqrt{15}}{7}$，求 l 的方程；

②点 P（0，y_0）在线段 AB 的垂直平分线上，且$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=3$，求 y_0.

20．（14 分）f（x）=$\frac{1}{2}ax^2+3x-(a+3)\ln x$（$a>-\frac{3}{2}$）

（1）当 a=1 时，求曲线 y=f（x）在 x=1 处的切线方程，

（2）讨论 f（x）的单调性，

（3）∀a∈[1，2]，∀x∈[1，3]，f（x）≥ta^2恒成立，求实数 t 的取值范围.

高考数学模拟试卷（文科）（5 月份）

参考答案与试题解析

一、选择题（共 8 小题，每小题 5 分，满分 40 分）

1．i 是虚数单位，则$\frac{2i}{1+3i}$=（　　）

A．$-\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$ B．$\frac{3}{4}-\frac{1}{4}i$ C．$\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$ D．$\frac{3}{4}+\frac{1}{4}i$

【解答】解：$\frac{2i}{1+3i}=\frac{2i(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\frac{6+2i}{10}=\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$，

故选：C．

2．方程 $e^x=2-x$ 的根位于（　　）

A．（﹣1，0）　B．（0，1）C．（1，2）D．（2，3）

【解答】解：设 f（x）$=e^x+x-2$，则 f（0）=1﹣2=﹣1＜0，

f（1）=e+1﹣2=e﹣1＞0，

所以根据零点存在性定理，在区间（0，1）上函数 f（x）存在一个零点，

即程 $e^x=2-x$ 的根位于（0，1）．

故选 B．

3．下列说法正确的是（　　）

A．命题“$\exists x_0\in R$，$2^{x_0}>1$”的否定是“$\forall x\in R$，$2^x\leqslant 1$”

B．命题“若 x=y，则 $x^2=y^2$”的否命题是“若 x=y，则 $x^2\neq y^2$”

C．p：$\forall x\in R$，$x^2+1\geqslant 1$，q：在△ABC 中，若 sinA=$\frac{1}{2}$，则 A=$\frac{\pi}{6}$，则 p∧q 为真命题

D．若平面α⊥平面β，直线 a⊂α，直线 b⊂β，则 a⊥b

【解答】解：对于 A，命题“$\exists x_0\in R$，$2^{x_0}>1$”的否定是“$\forall x\in R$，$2^x\leqslant 1$”，A 正确；

对于 B，命题“若 x=y，则 $x^2=y^2$”的否命题是“若 x≠y，则 $x^2\neq y^2$”，则 B 不正确；

对于 C，p：$\forall x\in R$，$x^2+1\geqslant 1$，成立，p 真；q：在△ABC 中，若 sinA=$\frac{1}{2}$，则 A=$\frac{\pi}{6}$

或$\frac{5\pi}{6}$，q 假，

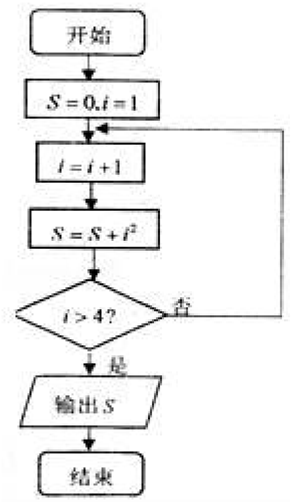
则 p∧q 为假命题，则 C 不正确；

对于 D，若平面α⊥平面β，直线 a⊂α，直线 b⊂β，则 a，b 平行、相交或异面，

则 D 不正确．

故选：A．

4．阅读如图的框图，则输出的 S=（　　）



A．30　B．29　C．55　D．54

【解答】解：模拟程序的运行，可得

S=0，i=1

执行循环体，i=2，S=4

不满足条件 i＞4，执行循环体，i=3，S=4+9=13

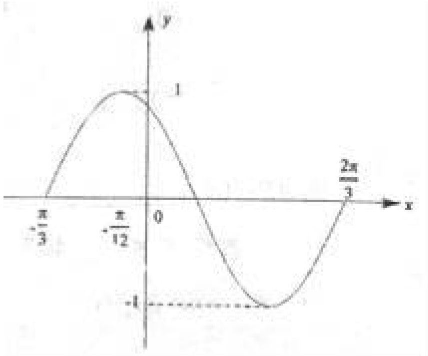
不满足条件 i＞4，执行循环体，i=4，S=13+16=29

不满足条件 i＞4，执行循环体，i=5，S=29+25=54

此时，满足条件 i＞4，退出循环，输出 S 的值为 54．

故选：D．

5．如图是函数 y=Asin（ωx+φ）（x∈R）在区间[$-\frac{\pi}{3}$，$\frac{2\pi}{3}$]上的图象，为了得到这个函数的图象．只需将 y=cosx（x∈R）的图象上的所有点（　　）



A．向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，再把所有点的横坐标扩大到原来的 2 倍

B．向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度．再把所有点的横坐标扩大到原来的 2 倍

C．把所有点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$，再向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度

D．把所有点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$，再向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度

【解答】解：根据函数 $y=A\sin(\omega x+\phi)(x\in R)$ 在区间$[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$上的图象可得 A=1，

$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=\pi$，∴$\omega=2$；

再根据五点法组图可得 $2\times(-\frac{\pi}{3})+\phi=0$，∴$\phi=\frac{2\pi}{3}$，

∴函数的解析式为 $y=\sin(2x+\frac{2\pi}{3})$，

可化为 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2})=\cos(2x+\frac{\pi}{6})=\cos 2(x+\frac{\pi}{12})$；

把 $y=\cos x(x\in R)$ 的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位，再把所得各点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$倍，

或把所有点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$，再向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度，

可得 $y=\sin(2x+\frac{2\pi}{3})$ 的图象．

故选：C．

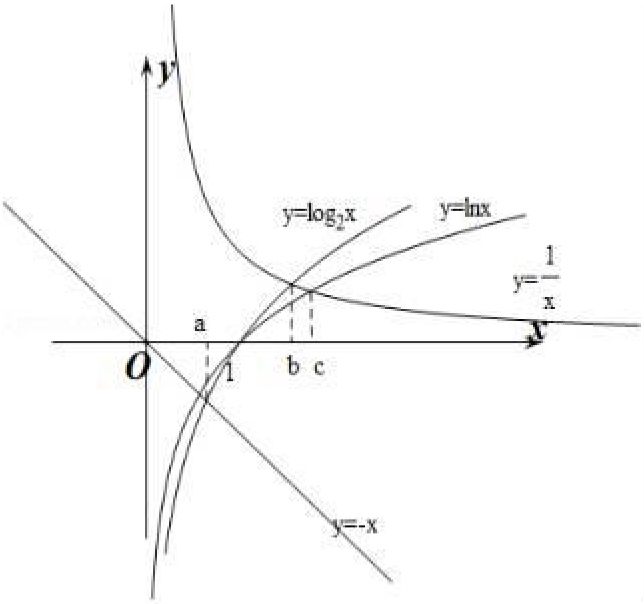
6．若实数 a，b，c 满足 $2^a=\frac{1}{a}$，$\log_2 b=\frac{1}{b}$，$\ln c=\frac{1}{c}$，则（　　）

A．a＜c＜b B．a＜b＜c C．b＜c＜a D．c＜b＜a

【解答】解：∵$2^a=\frac{1}{a}$，∴$\log_2\frac{1}{a}=a$，即 $\log_2 a=-a$，

作出 $y=\log_2 x$，$y=-x$，$y=\ln x$ 和 $y=\frac{1}{x}$的函数图象，

如图所示：



由图象可知

∴$0<a<1$，$c>b>1$．

∴$a<b<c$．

故选：B．

7．抛物线 C：$x^2=2py$（$p>0$）的焦点为 F，l 为 C 的准线，P∈C．且$|PF|=6$，过 P 作 l 的垂线，垂足为 M，若△FMP 为正三角形，则 p=（　　）

A．2　B．3　C．4　D．5

【解答】解：设准线 l 与 y 轴相交于 N，

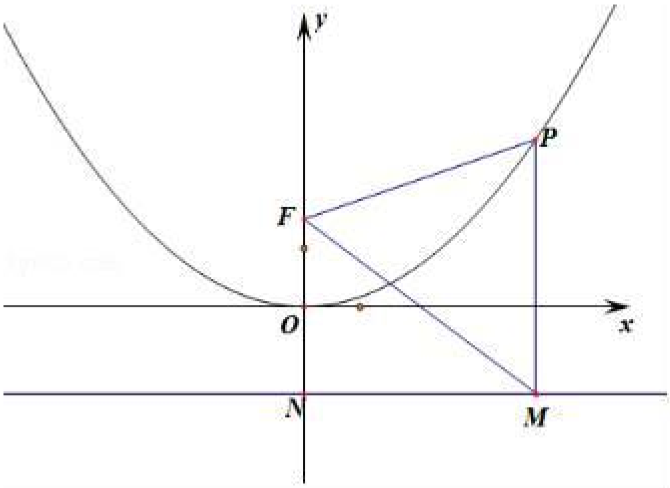
由$|PF|=6$，△FMP 为正三角形，则$|MF|=6$，$\angle PMF=\frac{\pi}{3}$

由 PM⊥l，$\angle FMN=\frac{\pi}{6}$，

∴$|FN|=3$，即 $p=|FN|=3$，

∴p=3，

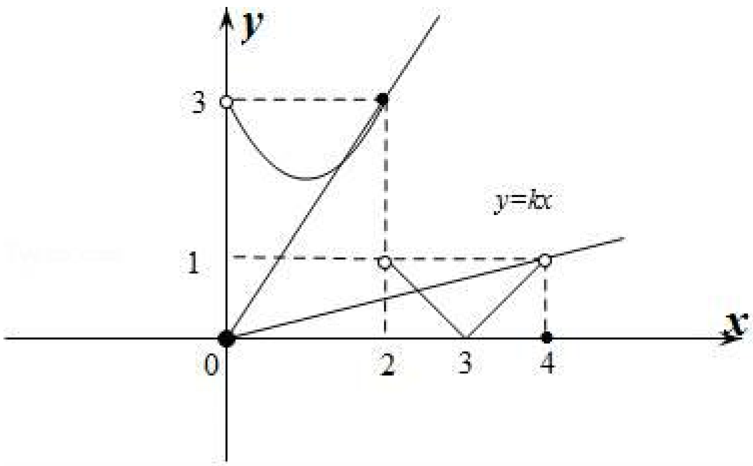
故选：B．



8．函数 $f(x)=\begin{cases}0, & x\in\{0, 4\}\\ x^2-2x+3, & 0<x\leqslant 2\\ |x-3|, & 2<x<4\end{cases}$，若 f（x）=kx 有三个不同的根，则实数 k 的取值范围是（　　）

A．$(0, \frac{1}{4})\cup(2\sqrt{3}-2, \frac{3}{2}]$　B．$[0, \frac{1}{4})\cup(2\sqrt{3}-2, \frac{3}{2}]$　C．$[0, \frac{1}{4}]\cup(2\sqrt{3}-2, \frac{3}{2}]$　D．$(0, \frac{1}{4}]\cup(2\sqrt{3}-2, \frac{3}{2}]$

【解答】解：作出 f（x）与 y=kx 的函数图象如图所示：



若直线 y=kx 过（4，1），则 $k=\frac{1}{4}$，

若直线 y=kx 过（2，3），则 $k=\frac{3}{2}$，

若直线 y=kx 与 $y=x^2-2x+3$ 相切，设切点坐标为（x_0，y_0），

则$\begin{cases}y_0=kx_0\\y_0=x_0^2-2x_0+3\\2x_0-2=k\end{cases}$，解得 $x_0=\sqrt{3}$，$y_0=6-2\sqrt{3}$，$k=2\sqrt{3}-2$，

∴当 $0\leqslant k<\frac{1}{4}$或 $2\sqrt{3}-2<k\leqslant\frac{3}{2}$时，直线 y=kx 与 f（x）的图象有 3 个交点，

故选 B．

二、填空题（共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分）

9．某单位生产甲，乙，丙三种不同型号的产品，甲乙丙三种产品数量之比为 3：4：5，现用分层抽样的方法抽出一个容量为 96 的样本，则乙种型号的产品数量为__32__．

【解答】解：根据分层抽样原理，当样本容量为 96 时，

抽取乙种型号的产品数量为 $96\times\frac{4}{3+4+5}=32$．

故选：32．

10．设集合 P={x∈N|x≤8}，Q={x∈R||x﹣1|≤2}，则 P∩Q=__{0，1，2，3}__．

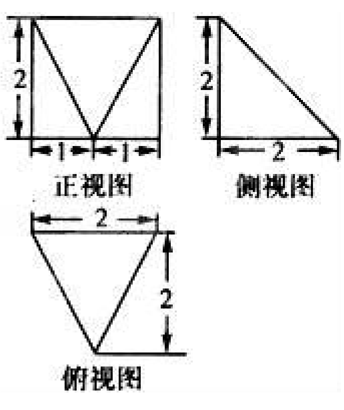
【解答】解：集合 P={x∈N|x≤8}={0，1，2，3，4，5，6，7，8}，

Q={x∈R||x﹣1|≤2}={x∈R|﹣2≤x﹣1≤2}={x∈R|﹣1≤x≤3}，

则 P∩Q={0，1，2，3}．

故答案为：{0，1，2，3}．

11．一个几何体的三视图如图，则该几何体的体积为__$\frac{8}{3}$__．



【解答】解：由已知中的三视图可得该几何体是一个又正视图为底面的四棱锥

由于底面为边长为 2 的正方形，故 S=2×2=4

而棱锥的高 h=2

故 $V=\frac{1}{3}\times S\times h=\frac{1}{3}\times 4\times 2=\frac{8}{3}$

故答案为：$\frac{8}{3}$

12．圆 $x^2-2ax+y^2=4-a^2$ 在 y 轴上的截距为 2，则实数 a=__ $\pm\sqrt{3}$ __．

【解答】解：∵圆 $x^2-2ax+y^2=4-a^2$ 在 y 轴上的截距为 2，

令 x=0，得 $y=\pm\sqrt{4-a^2}$，

∴$2\sqrt{4-a^2}=2$，解得 $a=\pm\sqrt{3}$.

故答案为：$\pm\sqrt{3}$.

13．已知 x＞0，y＞0，且$\frac{1}{3x+y}+\frac{2}{x+2y}=2$，则 x+y 的最小值是__ $\frac{9}{10}$ __．

【解答】解：∵x＞0，y＞0，且$\frac{1}{3x+y}+\frac{2}{x+2y}=2$，

则 $x+y=\frac{1}{5}(3x+y)+\frac{2}{5}(x+2y)=\frac{1}{10}[(3x+y)+(2x+4y)](\frac{1}{3x+y}+\frac{2}{x+2y})=\frac{1}{10}(5+\frac{2x+4y}{3x+y}+\frac{2(3x+y)}{x+2y})$

$\geqslant\frac{1}{10}(5+2\times 2\sqrt{\frac{x+2y}{3x+y}\times\frac{3x+y}{x+2y}})=\frac{9}{10}$，当且仅当 $y=2x=\frac{3}{5}$时取等号．

故答案为：$\frac{9}{10}$.

14．平行四边形 ABCD 中，|AB|=2，|BC|=$\sqrt{2}$，∠DAB=60°，$\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EB}$，则$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$=__ $2+\frac{5\sqrt{2}}{6}$ __．

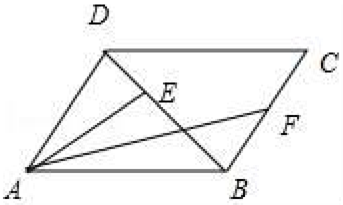
【解答】解：$\overrightarrow{AB}^2=4$，$\overrightarrow{AD}^2=2$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=2\times\sqrt{2}\times\cos 60^\circ=\sqrt{2}$，

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$，

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$,

$\therefore\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD})\bullet(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}^2+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}^2+\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}+\frac{5\sqrt{2}}{6}=2+\frac{5\sqrt{2}}{6}$.

故答案为：$2+\frac{5\sqrt{2}}{6}$.



三、解答题（共 6 小题，满分 80 分）

15．（13 分）在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别是 a，b，c，已知 $\cos A=-\frac{4}{5}$，$b=2$，$a=3$．

（1）求 sinB 的值；

（2）求 $\sin(2B-\frac{\pi}{6})$ 的值．

【解答】解：（1）$\cos A=-\frac{4}{5}$，$\frac{\pi}{2}<A<\pi$，则 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{3}{5}$，

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，则 $\sin B=\frac{2}{5}$，

∴sinB 的值 $\frac{2}{5}$；

（2）由 $0<B<\frac{\pi}{2}$，则 $\cos B=\sqrt{1-\sin^2 B}=\frac{\sqrt{21}}{5}$，

则 $\sin 2B=2\sin B\cos B=\frac{4\sqrt{21}}{25}$，$\cos 2B=2\cos^2 B-1=\frac{17}{25}$，

$\sin(2B-\frac{\pi}{6})=\sin 2B\cos\frac{\pi}{6}-\cos 2B\sin\frac{\pi}{6}$，

$=\frac{4\sqrt{21}}{25}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{17}{25}\times\frac{1}{2}$，

$=\frac{12\sqrt{7}-17}{50}$，

$\sin(2B-\frac{\pi}{6})$ 的值 $\frac{12\sqrt{7}-17}{50}$．

16．（13 分）某公司计划在甲、乙两个仓储基地储存总量不超过 300 吨的一种紧缺原材料，总费用不超过 9 万元，此种原材料在甲、乙两个仓储基地的储存费用

分别为500元/吨和200元/吨，假定甲、乙两个仓储基地储存的此种原材料每吨能给公司带来的收益分别为0.3万元和0.2万元．问该公司如何分配在甲、乙两个仓储基地的储存量，才能使公司的收益最大，最大收益是多少万元？

【解答】解：设公司在甲、乙两个仓储基地储存的原材料分别为x吨和y吨，总收益为z元，

由题意得$\begin{cases}x+y\leqslant 300\\500x+200y\leqslant 90000\\x\geqslant 0,\ y\geqslant 0.\end{cases}$即$\begin{cases}x+y\leqslant 300\\5x+2y\leqslant 900\\x\geqslant 0,\ y\geqslant 0.\end{cases}$

目标函数为$z=3000x+2000y$．　　…（3分）

作出二元一次不等式组所表示的平面区域．如图所示…（6分）

（注：图象没画或不正确扣3分）

作直线l：$3000x+2000y=0$，即$3x+2y=0$．

平移直线l，从图中可知，当直线l过M点时，

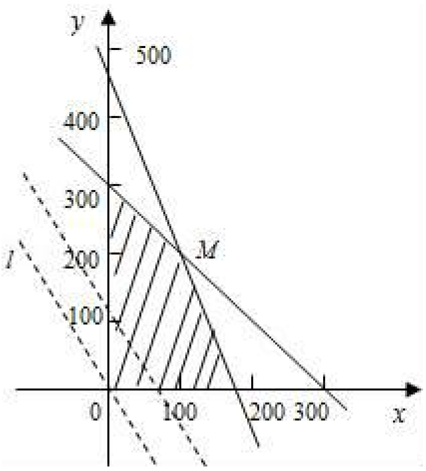
目标函数取得最大值．　　…（8分）

联立$\begin{cases}x+y=300\\5x+2y=900.\end{cases}$解得$x=100$，$y=200$．

∴点M的坐标为（100，200）．

∴$z_{max}=3000x+2000y=700000$（元）=70（万元）…（11分）

答：该公司在甲、乙两个仓储基地储存的原材料分别为100吨和200吨，才能使公司的收益最大，最大收益是70万元．…（12分）



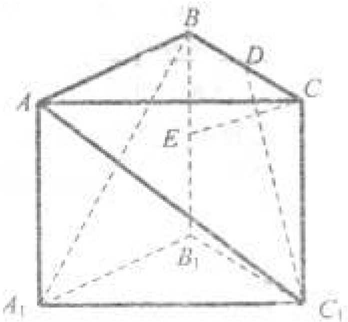
17．（13分）在棱长为2的正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，D，E分别是BC，BB_1的

中点．

（1）求证：A_1B∥AC_1D

（2）求证：CE⊥面 AC_1D

（3）求二面角 $C-AC_1-D$ 的正弦值．

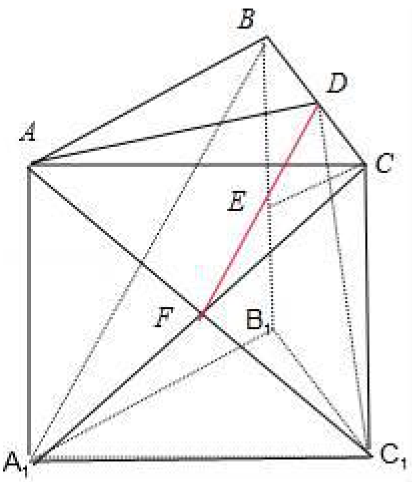


【解答】解：（1）如图，连接 A_1C 交 AC_1 于点 F，则 F 为 AC_1 的中点，

∴DF 为△A_1BC 的中位线，故 DF∥A_1B，

$A_1B\not\subset$面 AC_1D，$DF\subset$面 AC_1D，

∴A_1B∥面 AC_1D；



（2）∵正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D，E 分别是 BC，BB_1 的中点，

∴AD⊥面 B_1BCC_1，∴AD⊥CE，

在正方形 B_1BCC_1 中，∵D，E 分别是 BC，BB_1 的中点，可得△ECB≌DC_1C，

∴∠ECB=∠DC_1C，

即∠CDC_1+∠ECB=90°．∴CE⊥DC，

且 AD∩CD=D，∴CE⊥面 AC_1D；

（3）如图由（2）得 CE⊥面 AC_1D，设 CE 交 DC_1 于 H，连接 HF，

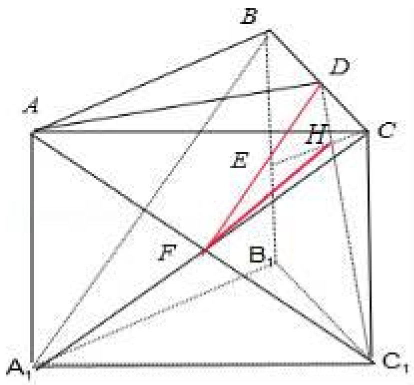
则∠HFC 就是二面角 $C-AC_1-D$ 的平面角，

在正方形 BB_1C_1C 中，由射影定理得 $CC_1^2=C_1D\bullet C_1H$，$\Rightarrow C_1H=\frac{4}{\sqrt{5}}$

由 $CH^2+C_1H^2=CC_1^2$，$\Rightarrow CH=\frac{2}{\sqrt{5}}$.

在 Rt△CHF 中，$\sin\angle HFC=\frac{CH}{CF}=\frac{2}{\sqrt{5}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$.

∴二面角 $C-AC_1-D$ 的正弦值为$\frac{\sqrt{10}}{5}$.



18．（13 分）在公比为 m 的等比数列$\{a_n\}$中，$a_3=2$，$a_1+a_2+a_3=6$.

（1）求 m.

（2）求$\{na_n\}$的前 n 项和 T_n.

【解答】解：（1）公比为 m 的等比数列$\{a_n\}$中，$a_3=2$，$a_1+a_2+a_3=6$.

∴ $a_1m^2=2$，$a_1(1+m+m^2)=6$，

解得 $m=1$，$a_1=2$ 或 $m=-\frac{1}{2}$，$a_1=8$.

∴$m=1$，或 $m=-\frac{1}{2}$.

（2）由（1）可得：$a_n=2$ 或 $a_n=8\times(-\frac{1}{2})^{n-1}$.

①$a_n=2$ 时，$na_n=2n$.

∴$\{na_n\}$的前 n 项和 $T_n=2\times\frac{n(n+1)}{2}=n^2+n$.

②$a_n=8\times(-\frac{1}{2})^{n-1}$. $na_n=8n\times(-\frac{1}{2})^{n-1}$.

∴$\{na_n\}$的前 n 项和 $T_n=8[1+2\times(-\frac{1}{2})+3\times(-\frac{1}{2})^2+\ldots+n\times(-\frac{1}{2})^{n-1}]$，

∴ $-\frac{1}{2}T_n=8[-\frac{1}{2}+2\times(-\frac{1}{2})^2+\ldots+(n-1)\times(-\frac{1}{2})^{n-1}+n\times(-\frac{1}{2})^n]$.

$\therefore \frac{3}{2}T_n=8[1+(-\frac{1}{2})+(-\frac{1}{2})^2+\ldots+(-\frac{1}{2})^{n-1}-n\times(-\frac{1}{2})^n]$.

$\therefore T_n=\frac{32}{9}-\frac{32+48n}{9}\times(-\frac{1}{2})^n$.

19．（14 分）椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）的离心率为$\frac{\sqrt{6}}{3}$，各个顶点围成的菱形面积为 $2\sqrt{3}$.

（1）求 C 的方程；

（2）过右顶点 A 的直线 l 交椭圆 C 于 A，B 两点.

①若$|AB|=\frac{4\sqrt{15}}{7}$，求 l 的方程；

②点 P（0，y_0）在线段 AB 的垂直平分线上，且$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=3$，求 y_0.

【解答】解：（1）由题意可知$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}\\ 2ab=2\sqrt{3}\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$，解得 $a=\sqrt{3}$，$b=1$，$c=\sqrt{2}$，

∴椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{3}+y^2=1$.

（2）①A（$\sqrt{3}$，0），设直线 l 的方程为 $y=k(x-\sqrt{3})$，

联立方程组$\begin{cases}y=k(x-\sqrt{3})\\ \frac{x^2}{3}+y^2=1\end{cases}$，消元得：$(1+3k^2)x^2-6\sqrt{3}k^2x+9k^2-3=0$，

设 B（x_1，y_1），∵$x=\sqrt{3}$是此方程的一个解，∴$x_1=\frac{3\sqrt{3}k^2-\sqrt{3}}{1+3k^2}$，

$\therefore |AB|=\sqrt{1+k^2}\bullet(\sqrt{3}-x_1)=\sqrt{1+k^2}\bullet\frac{2\sqrt{3}}{1+3k^2}=\frac{4\sqrt{15}}{7}$，解得 $k^2=\frac{1}{4}$，

$\therefore k=\pm\frac{1}{2}$，

∴直线 l 的方程为 $y=\pm\frac{1}{2}(x-\sqrt{3})$.

②由①知 B（$\frac{3\sqrt{3}k^2-\sqrt{3}}{1+3k^2}$，$\frac{-2\sqrt{3}k}{1+3k^2}$），设 AB 的中点为 D，则 D（$\frac{3\sqrt{3}k^2}{1+3k^2}$，$\frac{-\sqrt{3}k}{1+3k^2}$），

$\therefore k_{PD}=\dfrac{\dfrac{-\sqrt{3}k}{1+3k^2}-y_0}{\dfrac{3\sqrt{3}k^2}{1+3k^2}}=-\dfrac{1}{k}$，解得 $y_0=\dfrac{2\sqrt{3}k}{1+3k^2}$，

$\therefore \overrightarrow{PA}=(\sqrt{3},\ \dfrac{-2\sqrt{3}k}{1+3k^2})$，$\overrightarrow{PB}=(\dfrac{3\sqrt{3}k^2-\sqrt{3}}{1+3k^2},\ \dfrac{-4\sqrt{3}k}{1+3k^2})$，

$\therefore \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\dfrac{9k^2-3}{1+3k^2}+\dfrac{24k^2}{(1+3k^2)^2}=3$，化简得 $9k^4+8k^2-1=9k^4+6k^2+1$，解得 $k^2=1$，

$\therefore k=\pm1$，

$\therefore y_0=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$或 $y_0=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

20．（14 分）$f(x)=\dfrac{1}{2}ax^2+3x-(a+3)\ln x\ (a>-\dfrac{3}{2})$

（1）当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程，

（2）讨论 $f(x)$ 的单调性，

（3）$\forall a\in[1,2]$，$\forall x\in[1,3]$，$f(x)\geqslant ta^2$ 恒成立，求实数 t 的取值范围.

【解答】解：（1）$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+3x-4\ln x$ 的导数为 $f'(x)=x+3-\dfrac{4}{x}$，

可得曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线斜率为 $1+3-4=0$，切点为 $(1,\ \dfrac{7}{2})$，

故曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y-\dfrac{7}{2}=0(x-1)$，

即有 $y=\dfrac{7}{2}$；

（2）$f(x)=\dfrac{1}{2}ax^2+3x-(a+3)\ln x\ (a>-\dfrac{3}{2})$ 的导数为：

$f'(x)=ax+3-\dfrac{a+3}{x}=\dfrac{(x-1)(ax+a+3)}{x}$，

当 $a=0$ 时，$f'(x)=\dfrac{3(x-1)}{x}$，当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 递减；

当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 递增.

当 $a>0$ 时，$-\dfrac{a+3}{a}<1$，可得当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 递减；

当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 递增.

当 $-\dfrac{3}{2}<a<0$ 时，$-\dfrac{a+3}{a}>1$，可得当 $0<x<1$ 或 $x>-\dfrac{a+3}{a}$时，$f'(x)<0$，$f(x)$

递减；

当$1<x<-\frac{a+3}{a}$，时，$f'(x)>0$，$f(x)$递增.

综上可得，当$a\geqslant 0$时，$f(x)$在$(0,1)$递减，在$(1,+\infty)$递增；

当$-\frac{3}{2}<a<0$时，$f(x)$在$(0,1)$，$(-\frac{a+3}{a},+\infty)$递减；在$(1,-\frac{a+3}{a})$递增.

（3）由题意可知，对任意$a\in[1,2]$及$x\in[1,3]$时，恒有$f(x)\geqslant ta^2$恒成立等价于

$f(x)_{min}\geqslant ta^2$，

由（2）可得当$a\geqslant 0$时，$f(x)$在$x\in[1,3]$上递增，$f(x)$的最小值为$f(1)=\frac{1}{2}a+3$，

任意$a\in[1,2]$时，$\frac{1}{2}a+3\geqslant ta^2$恒成立，

$\therefore t\leqslant\frac{3}{a^2}+\frac{1}{2a}$，$a\in[1,2]$时恒成立，

令$g(a)=\frac{3}{a^2}+$，由$g'(a)=-\frac{6}{a^3}-\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{a^2}<0$，

可得$g(a)$在$[1,2]$递减，即有$g(a)$的最小值为$g(2)=1$，

则实数t的取值范围为$t\leqslant 1$.