

2013—2014 学年度上学期期末考试

高二年级理科 数学试卷

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的）

1. 条件 $p: x^2 + x > 0$ 是条件 $q: \frac{1}{2^x} < 1$ 成立的（ ）条件

A. 充分不必要 B. 必要不充分 C. 充要 D. 既不充分也不必要

2. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2 - 1$ ，则 $a_5 =$ （ ）

A. 24 B. 15 C. 9 D. 7

3. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率是 $\sqrt{10}$ ，则它的渐近线方程是（ ）

A. $y = \pm 3x$ B. $y = \pm \frac{1}{3}x$ C. $y = \pm \sqrt{10}x$ D. $y = \pm \frac{\sqrt{10}}{10}x$

4. 对于正实数 a, b ，下列结论正确的是（ ）

A. $a^2 + b^2 > 2ab$ B. $\frac{2ab}{a+b} \geq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$
C. $a^3 + b^3 > ab^2 + ba^2$ D. $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} > \frac{2}{a+b+1}$

5. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_2 = 7$ ， $a_5 = 16$ ，则 a_{33} 等于（ ）

A. 99 B. 100 C. 102 D. 104

6. 椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1$ 上一动点 M 与椭圆两焦点能构成的直角三角形的个数是（ ）

A. 2 B. 4 C. 6 D. 8

7. 函数 $y = x + \frac{5}{x+1} (x \geq 2)$ 取得最小值时的 x 的值为（ ）

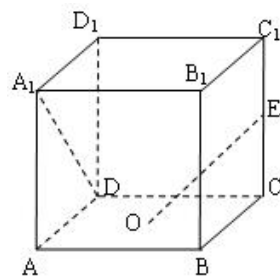
A. $\sqrt{5} - 1$ B. 2 C. $\sqrt{5}$ D. $\sqrt{5} + 1$

8. 如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，

O 为底面的中心， E 是 CC_1 的中点，那么异面直线

A_1D 与 EO 所成角的余弦值为（ ）

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 0

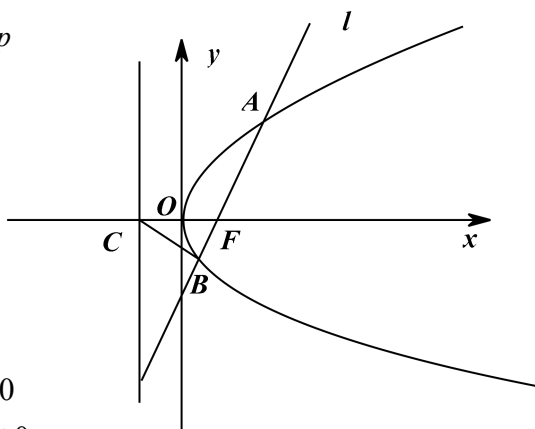


9. 数列 $\{a_n\}$ 中， $a_{n+1} = ma_n (n \in \mathbb{N}^*)$ ， $a_1 = 1$ ，则（ ）

- A. $\{a_n\}$ 是等比数列
 B. $\{a_n\}$ 前 n 项和 $S_n = \frac{1-m^n}{1-m}$
 C. $a_{n+1}^2 = a_n \cdot a_{n+2}$
 D. $S_n \neq 0$ 恒成立

10. 设抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F ，其准线和 x 轴的交点为 C ，经过点 F 的直线 l 与抛物线相交于 A 、 B 两点，若 $CB \perp AB$ ，则 $|AF| - |BF| =$ ()

- A. $\frac{p}{2}$ B. $-\frac{p}{2}$ C. $2p$ D. $-2p$



11. 已知 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 2y - x - 1 \geq 0 \\ 2y - 3x + 1 \leq 0 \\ 2y + x - 11 \leq 0 \end{cases}$

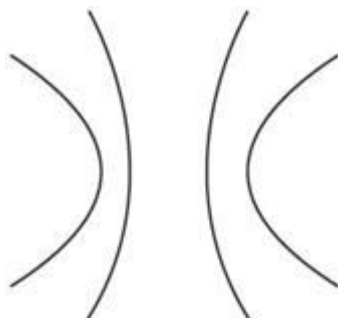
$z = ax + by (a > b > 0)$ 最大值为 12，则 $\frac{5}{a} + \frac{2}{b}$ 的最小值为 ()

- A. $\frac{31+10\sqrt{6}}{12}$ B. $\frac{23+4\sqrt{30}}{12}$ C. $\frac{7+2\sqrt{10}}{12}$ D. 4

12. 已知定圆 O_1 、 O_2 的半径分别为 r_1 、 r_2 ，圆心距 $|O_1O_2| = 2$ ，动圆 C 与圆 O_1 、 O_2 都相切，圆心 C 的轨迹为如图所示的两条双曲线，两条双曲线的离心率分别为 e_1 、 e_2 ，则

$\frac{e_1 + e_2}{e_1 \cdot e_2}$ 的值为 ()

- A. $r_1 + r_2$ B. r_1 和 r_2 中的较大者
 C. r_1 和 r_2 中的较小者 D. $|r_1 - r_2|$



二、填空题 (本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分)

13. 不等式 $\frac{x^2 - x}{x + 2} < 0$ 的解集为_____.

14. 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 2a_n + 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 则 $a_n =$ _____.

15. 已知 P 为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 上任意一点, 过 P 作双曲线渐进线的平行线, 与渐进线于点 M , O 为坐标原点, 则 $|PM||OM|$ 的值为_____.

16. 一个四面体的顶点在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中的坐标分别是 $(1,0,1)$, $(1,1,0)$, $(0,1,1)$, $(0,0,0)$, 则该四面体 ①相互成异面直线的两条棱成角为 90° ;

②外接球半径为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③相邻两侧面所成二面角的余弦值为 $\frac{1}{3}$ 其中正确的命题序号为_____ (写出你认为正确的所有命题序号)

三、解答题 (本大题共 6 小题, 满分 70 分. 解答需写出文字说明、证明过程和演算步骤)

17. (本小题满分 10 分)

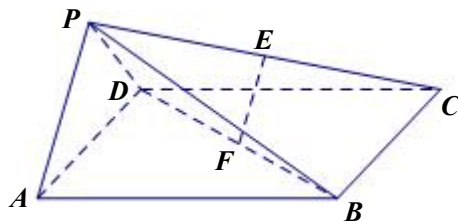
已知 $p: x^2 - (3a+1)x + 2a^2 + 2a < 0$, $q: x^2 - 8x - 20 > 0$, 若 p 是 q 的充分不必要条件, 求实数 a 的取值范围.

18. (本小题满分 12 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, 侧面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$, 且 $PA = PD = \frac{\sqrt{2}}{2} AD$, E 、 F 分别为 PC 、 BD 的中点.

(I) 求证: $EF \parallel$ 平面 PAD ;

(II) 求证: 面 $PAB \perp$ 平面 PDC ;



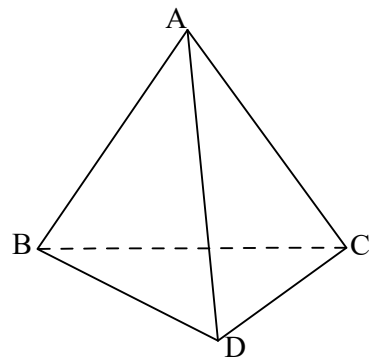
19. (本小题满分 12 分)

如图, 在三棱锥 $A-BCD$ 中, 面 $ABC \perp$ 面 BCD , $\triangle ABC$ 是正三角形, $\angle BCD = 90^\circ$.

(I) 求证: $AB \perp CD$;

(II) 若异面直线 AC 、 BD 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$,

求二面角 $D-AB-C$ 的大小;



20. (本小题满分 12 分)

已知 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且有 $a_1 = 1, S_n + 1 = a_{n+1} (n \in \mathbf{N}^*)$.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n ;

(II) 若 $b_n = \frac{n}{4a_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n ;

(III) 是否存在最小正整数 m , 使得不等式 $\sum_{k=1}^n \frac{k+2}{S_k \cdot (T_k + k + 1)} < m$ 对任意正整数 n 恒

成立, 若存在, 求出 m 的值; 若不存在, 说明理由.

21. (本题满分 12 分)

过椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左焦点 $F(-\sqrt{2}, 0)$ 作两条互相垂直的直线与椭圆分别相交于 A 、

C 及 B 、 D , 当直线 AC 与 x 轴垂直时, 四边形 $ABCD$ 的面积为 4.

(I) 求椭圆标准方程;

(II) 求 $\frac{|AC|^2 |BD|^2}{|AC| + |BD|}$ 的最小值.

22. (本题满分 12 分)

如图, 已知过点 $M(x_1, y_1)$ 的直线 $l_1: x_1x + 3y_1y = 6$ 与过点 $N(x_2, y_2)$ (其中 $x_2 \neq x_1$)

的直线 $l_2: x_2x + y_2y = 6$ 的交点 E 在双曲线 $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{2} = 1$ 上, 直线 MN 与两条渐近

线分别交与 G 、 H 两点, P 为 GH 的中点。

(I) 证明: $|OP| = |OE|$;

(II) 求 $\triangle OPG$ 的面积。

