

# 2014-2015 学年度上学期期末考试高一年级数学科试卷

## 第 I 卷（选择题 共 60 分）

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $A = \{1, 2^a\}$ ,  $B = \{a, b\}$ , 若  $A \cap B = \{\frac{1}{2}\}$ , 则  $A \cup B =$  ( )

A.  $\{-1, \frac{1}{2}\}$     B.  $\{1, \frac{1}{2}\}$     C.  $\{-1, \frac{1}{2}, 1\}$     D.  $\{\frac{1}{2}, 1, b\}$

2. 圆  $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 1$  关于直线  $y = x - 1$  对称的圆的方程为 ( )

A.  $x^2 + (y-3)^2 = 1$     B.  $x^2 + (y+3)^2 = 1$

C.  $(x-3)^2 + y^2 = 1$     D.  $(x+3)^2 + y^2 = 1$

3. 如果幂函数  $y = (n^2 - 3n + 3)x^{n^2 - n - 2}$  的图象不过原点，则  $n$  取值是 ( )

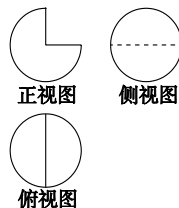
A.  $n=1$  或  $n=2$     B.  $n=1$  或  $n=0$     C.  $n=1$     D.  $n=2$

4. 函数  $f(x) = \ln x + \frac{1}{3}x$  的零点所在的区间是 ( )

A.  $(1, +\infty)$     B.  $(\frac{1}{e}, 1)$     C.  $(0, \frac{1}{e})$     D.  $(-1, 0)$

5. 一个几何体的三视图如图所示，其中俯视图与侧视图均为半径是 2 的圆，则这个几何体的表面积是 ( )

A.  $16\pi$     B.  $14\pi$     C.  $12\pi$     D.  $8\pi$



6. 若点  $A(-3, -4)$ ,  $B(6, 3)$  到直线  $l: ax + y + 1 = 0$  的距离相等，则实数  $a$  的值为 ( )

A.  $\frac{7}{9}$     B.  $-\frac{1}{3}$     C.  $\frac{7}{9}$  或  $\frac{1}{3}$     D.  $-\frac{7}{9}$  或  $-\frac{1}{3}$

7. 若  $g(x) = 1 - 2x$ ,  $f[g(x)] = (\frac{1}{3})^x$ , 则  $f(4) =$  ( )

A.  $-27$     B.  $\frac{1}{27}$     C.  $9$     D.  $3\sqrt{3}$

8. 在空间直角坐标系中,  $O$  为坐标原点, 设  $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ,  $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ ,

$C\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ , 则 ( )

- A.  $OA \perp AB$       B.  $AB \perp AC$       C.  $AC \perp BC$       D.  $OB \perp OC$

9.  $\alpha, \beta$  表示两个不同的平面,  $l$  表示既不在  $\alpha$  内也不在  $\beta$  内的直线, 若以①  $l \perp \alpha$ ;

②  $l \parallel \beta$ ; ③  $\alpha \perp \beta$  中其中两个作为条件, 第三个作为结论, 构成的命题中正确个数

为 ( )

- A. 0      B. 1      C. 2      D. 3

10. 已知  $f(x) = \begin{cases} (3-a)x, & x \in (-\infty, 1] \\ a^x, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$  是  $(-\infty, +\infty)$  上的增函数, 那么  $a$  的取值范围 ( )

- A.  $(0, 3)$       B.  $(1, 3)$       C.  $(1, +\infty)$       D.  $[\frac{3}{2}, 3)$

11. 已知空间 4 个球, 它们的半径均为 2, 每个球都与其他三个球外切, 另有一个小球与这 4 个球都外切, 则这个小球的半径为 ( )

- A.  $\sqrt{6} - \sqrt{2}$       B.  $\sqrt{6} - 2$       C.  $\sqrt{10} - 3$       D.  $2\sqrt{2} - 2$

12. 定义  $\min[f(x), g(x)] = \begin{cases} f(x), & f(x) \leq g(x) \\ g(x), & f(x) > g(x) \end{cases}$ , 若函数  $f(x) = x^2 + tx + s$  的图像经

过两点  $(x_1, 0), (x_2, 0)$ , 且存在整数  $m$ , 使得  $m < x_1 < x_2 < m+1$  成立, 则 ( )

- A.  $\min[f(m), f(m+1)] < \frac{1}{4}$       B.  $\min[f(m), f(m+1)] > \frac{1}{4}$   
C.  $\min[f(m), f(m+1)] = \frac{1}{4}$       D.  $\min[f(m), f(m+1)] \geq \frac{1}{4}$

## 第 II 卷 (非选择题 共 90 分)

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 设二次函数  $f(x) = ax^2 - 2ax + c$  在区间  $[0, 1]$  上单调递减, 且  $f(n) \leq f(0)$ , 则实数  $n$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

14. 过原点  $O$  作圆  $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 20 = 0$  的两条切线，设切点分别为  $M, N$ ，则线段  $MN$  的长为\_\_\_\_\_.

15. 已知正方形  $ABCD$  的边长是 4，若将  $\triangle BCD$  沿正方形的对角线  $BD$  所在的直线进行翻折，则在翻折的过程中，四面体  $C-ABD$  的体积的最大值是\_\_\_\_\_.

16. 已知偶函数  $f(x)$  对任意  $x \in \mathbb{R}$  都有  $f(x+3) = -\frac{1}{f(x)}$ ，且当  $x \in [-3, -2]$  时，

$f(x) = 4x$ ，则  $f(2015) =$ \_\_\_\_\_.

**三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤.**

17. (本小题满分 10 分)

设全集为  $U = \mathbb{R}$ ，集合  $A = \{x | (x+3)(4-x) \leq 0\}$ ， $B = \{x | \log_2(x+2) < 3\}$ .

(1) 求  $A \cap C_U B$ ;

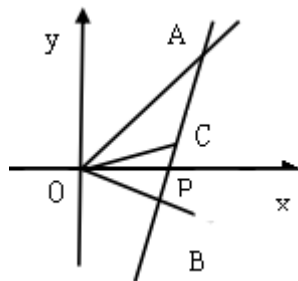
(2) 已知  $C = \{x | 2a < x < a+1\}$ ，若  $C \subseteq B$ ，求实数  $a$  的取值范围.

18. (本小题满分 12 分)

如图所示，射线  $OA, OB$  分别与  $x$  轴正半轴成  $45^\circ$  和  $30^\circ$  角，过点

$P(2, 0)$  作直线  $AB$  分别交  $OA, OB$  于  $A, B$  两点，当  $AB$  的中

点  $C$  恰好落在直线  $y = \frac{1}{2}x$  上时，求直线  $AB$  的方程.



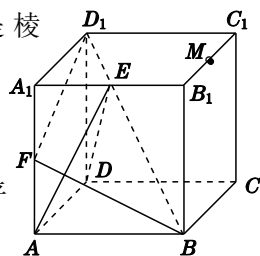
19. (本小题满分 12 分)

如图，在正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中， $E, F, M$  分别是棱

$A_1B_1, AA_1, B_1C_1$  的中点.

(1) 求证： $BF \perp$  平面  $ADE$ ; (2) 是否存在过  $E, M$  两点且与平

面  $BFD_1$  平行的平面若存在，请指出并证明；若不存在，请说明理由.



20. (本小题满分 12 分)

因发生意外交通事故, 一辆货车上的某种液体泄漏到一游泳池中. 为了治污, 根据环保部门的建议, 现决定在游泳池中投放一种可与污染液体发生化学反应的药剂. 已知每

投放  $a \left( \frac{1}{3} \leq a \leq 3, a \in R \right)$  个单位的药剂, 它在水中释放的浓度  $y$  (克/升) 随着时间

$x$  (天) ( $x \in R$ ) 变化的函数关系式近似为  $y = af(x)$ , 其中

$$f(x) = \begin{cases} \frac{12}{6-x} - 1 & (0 \leq x \leq 4) \\ 5 - \frac{1}{2}x & (4 < x \leq 10) \end{cases} .$$

若多次投放, 则某一时刻水中的药剂浓度为每次投放

的药剂在相应时刻所释放的浓度之和. 根据经验, 当水中药剂的浓度不低于 3 (克/升) 时, 它才能起到有效治污的作用.

(I) 若一次投放 3 个单位的药剂, 则有效治污时间可达几天?

(II) 若第一次投放 2 个单位的药剂, 6 天后再投放  $a$  个单位的药剂, 要使接下来的 4 天中能够持续有效治污, 试求  $a$  的最小值.

21. (本大题满分 12 分)

已知  $\odot C: x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ .

(1) 若  $\odot C$  的切线在  $x$  轴,  $y$  轴上截距相等, 求此切线的方程;

(2) 从圆外一点  $P(x_0, y_0)$  向圆引切线  $PM$ ,  $M$  为切点,  $O$  为原点, 若  $|PM| = |PO|$ ,

求使  $\sqrt{(x_0 - 2)^2 + y_0^2}$  取最小值时  $P$  点坐标.

22. (本大题满分 12 分)

对于定义域为  $A$  的函数  $y = f(x)$ , 若同时满足下列条件:

①  $f(x)$  在  $A$  内具有单调性;

② 存在区间  $[a, b] \subseteq A$ , 使  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的值域为  $[a, b]$ ;

则称  $f(x)$  为闭函数.

(I) 求闭函数  $y = -x^3$  符合条件②的区间  $[a, b]$ ;

(II) 判断函数  $f(x) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{x} (x > 0)$  是否为闭函数? 并说明理由;

(III) 若函数  $y = k + \sqrt{x+3}$  是闭函数, 求实数  $k$  的取值范围.