在圆锥曲线中体会函数与方程的思想

函数与方程的思想是数学中最为重要的思想方法之一，也是历年高考的重点，在高考试卷中，体现函数与方程思想的试题所占体重较大，且综合知识多，题型多，应用技巧多，函数与方程思想在函数与导数、数列、不等式、解析几何等问题中用着广泛的应用。本文将结合实例，简单介绍在圆锥曲线中怎样应用函数与方程的思想。

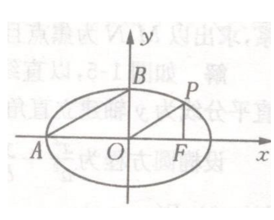
首先，必须要弄清楚什么是函数与方程思想，函数与方程思想是指在数学问题解决过程中，根据问题中的数量关系，构造或建立适当的函数方程。应用函数与方程的知识及其性质进行分析问题和解决问题。函数与方程思想可以使数学问题解决变得简洁、明快，能够化繁为简，化难为易。

圆锥曲线在高考中历来是作为重点题型，无论客观题还是解答题，均占有相当大的比例，题型特点是知识点多，参数多，运算量大，圆锥曲线与导数问题是所有学生和教师公认的难题部分，尤其对于临近高考的考生，更是花费大量的时间和精力来攻克圆锥曲线习题。

圆锥曲线实际上与函数与方程的思想结合非常紧密，仅从表现形式上来说，我们熟悉的椭圆，双曲线，抛物线的表现形式，就是二元二次方程；过半的圆锥曲线习题需要用到方程联立，而联立之后常用的判别式、韦达定理等方法，又是二次方程的常用方法；历年高考题中圆锥曲线部分习题，经常问到参数的取值范围问题，而此类问题，我们直接就可以和求函数值域联系起来。

我们来看高考试题中圆锥曲线部分的有关习题：

类型一：求值问题中用到方程思想



例 1：设 A、B 分别为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的长轴与短轴的一个端点，O 为原点，过 O 点作射线 OP//AB，交椭圆于 P 点，过 P 点作 PF⊥ x 轴，垂足为 F，若 F 恰为椭圆的一个焦点，求椭圆的离心率。

解：易证 ΔAOB 与 ΔOFP 相似，则 $\dfrac{AO}{OF}=\dfrac{OB}{FP}$,即 $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{\frac{b^2}{a}}$

整理得$b=c$　　继而$a^2-c^2=c^2$　（1）　$\Rightarrow$　$\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{1}{2}$　$\Rightarrow$　$e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

注意（1）式为关于椭圆两个参数a与c的方程，在求离心率问题中，只要根据题目条件得出一个关于参数a、b、c的方程，继而转化为关于a与c的齐次方程，则此类问题都可以解决了。而其他的求值问题，基本上也都可以转化为方程求解问题，这里就完全是方程的思想了。

类型二：求取值范围与最值问题中用到函数值域问题

例2：直线$m:y=kx+1$和双曲线$x^2-y^2=1$的左支交于A、B两点，直线l过点$P(-2,0)$和线段AB的中点M，求l在y轴上的截距b的取值范围.

解：b的变化是由于k的变化而引起的，即对于k的任一确定的值，b有确定的值与之对应，因此b是k的函数，本题即为求这个函数的值域.

由$\begin{cases} y=kx+1, \\ x^2-y^2=1, \end{cases}(x\le -1)$消去$y$，得$(k^2-1)x^2+2kx+2=0$.（*）

因为直线m与双曲线的左支有两个交点，所以方程（*）有两个不相等的负实数根.

所以$\begin{cases} \Delta=4k^2+8(1-k^2)>0, \\ x_1+x_2=\dfrac{2k}{1-k^2}<0, \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{-2}{1-k^2}>0. \end{cases}$　解得$1<k<\sqrt{2}$.

设$M(x_0,y_0)$，则$\begin{cases} x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{k}{1-k^2}, \\ y_0=kx_0+1=\dfrac{1}{1-k^2}. \end{cases}$

由$P(-2,0),M(\dfrac{k}{1-k^2},\dfrac{1}{1-k^2}),Q(0,b)$三点共线，得出

$$b=\frac{2}{-2k^2+k+2}.$$

请关注此式，就会看到题目所求的截距b的取值范围，至此已经变成求关于参数k的函数问题，接下来就可以利用求函数值域的方法解决问题了

设$f(k)=-2k^2+k+2=-2(k-\dfrac{1}{4})^2+\dfrac{17}{8}$，则$f(k)$在$(1,\sqrt{2})$上为减函数，

$\therefore f(\sqrt{2})<f(k)<f(1)$，且$f(k)\ne 0$. $\therefore -(2-\sqrt{2})<f(k)<0$，或$0<f(k)<1$，

$\therefore b<-\sqrt{2}-2$，或$b>2$．

点评：根据函数的思想建立b与k的函数关系，根据方程的思想，运用二次方程的理论具体求出b的表达式，是解此题的两个关键问题．不少解析几何问题，其中某些元素处于运动变化之中，存在着相互联系、相互制约的量，它们之间往往构成函数关系；对于直线和曲线交点问题，经常要转化为方程问题，用方程的理论加以解决．

类型三：解题过程中用到函数与方程思想

例 3（2013 年高考四川卷（理））已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,(a>b>0)$的两个焦点分别为$F_1(-1,0),F_2(1,0)$，且椭圆$C$经过点$P(\dfrac{4}{3},\dfrac{1}{3})$．

(Ⅰ)求椭圆C的离心率;

(Ⅱ)设过点$A(0,2)$的直线l与椭圆C交于M、N两点,点Q是线段MN上的点,且$\dfrac{2}{|AQ|^2}=\dfrac{1}{|AM|^2}+\dfrac{1}{|AN|^2}$,求点$Q$的轨迹方程.

解: $2a=|PF_1|+|PF_2|=\sqrt{\left(\dfrac{4}{3}+1\right)^2+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}+\sqrt{\left(\dfrac{4}{3}-1\right)^2+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=2\sqrt{2}$

所以, $a=\sqrt{2}$.

又由已知, $c=1$,

所以椭圆 C 的离心率$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(II)由(I)知椭圆 C 的方程为$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$.

设点 Q 的坐标为(x, y).

(1)当直线l与x轴垂直时,直线l与椭圆C交于$(0,1),(0,-1)$两点,此时Q点坐标为$\left(0,2-\dfrac{3\sqrt{5}}{5}\right)$

(2) 当直线l与x轴不垂直时,设直线l的方程为$y=kx+2$.

因为M,N在直线l上,可设点M,N的坐标分别为$(x_1,kx_1+2),(x_2,kx_2+2)$,则

$|AM|^2=(1+k^2){x_1}^2,|AN|^2=(1+k^2){x_2}^2$.　　又$|AQ|^2=x^2+(y-2)^2=(1+k^2)x^2$.

由$\dfrac{2}{|AQ|^2}=\dfrac{1}{|AM|^2}+\dfrac{1}{|AN|^2}$，得

$\dfrac{2}{(1+k^2)x^2}=\dfrac{1}{(1+k^2)x_1^2}+\dfrac{1}{(1+k^2)x_2^2}$，即

$\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}=\dfrac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1^2x_2^2}$ ①

注意此式，同时出现了x_1+x_2和$x_1\cdot x_2$，本题基本定型，需要使用二次方程的韦达定理

将$y=kx+2$代入$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$中，得

$(2k^2+1)x^2+8kx+6=0$ ②

由$\Delta=(8k)^2-4\times(2k^2+1)\times 6>0$，得$k^2>\dfrac{3}{2}$.

此处为二次方程的判别式

由②可知$x_1+x_2=-\dfrac{8k}{2k^2+1}, x_1x_2=\dfrac{6}{2k^2+1}$,

代入①中并化简，得$x^2=\dfrac{18}{10k^2-3}$ ③

因为点Q在直线$y=kx+2$上，所以$k=\dfrac{y-2}{x}$，代入③中并化简，得$10(y-2)^2-3x^2=18$.

由③及$k^2>\dfrac{3}{2}$，可知$0<x^2<\dfrac{3}{2}$，即$x\in\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

又$\left(0,2-\dfrac{3\sqrt{5}}{5}\right)$满足$10(y-2)^2-3x^2=18$，故$x\in\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2},\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

由题意，$Q(x,y)$在椭圆C内部，所以$-1\le y\le 1$，

又由$10(y-2)^2=18+3x^2$有

$(y-2)^2\in\left[\dfrac{9}{5},\dfrac{9}{4}\right)$且$-1\le y\le 1$，则$y\in\left(\dfrac{1}{2},2-\dfrac{3\sqrt{5}}{5}\right]$.

所以点Q的轨迹方程是$10(y-2)^2-3x^2=18$，其

中，$x\in\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2},\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$，$y\in\left(\dfrac{1}{2},2-\dfrac{3\sqrt{5}}{5}\right]$

点评：当我们得到方程$10(y-2)^2-3x^2=18$时，千万不要掉以轻心，题目并没有完成，还

有变量的取值范围是我们关注的重点，而此类取值问题并不会太难以解决，反而是容易被遗忘，这里就需要学生们把此类取值范围问题与函数的定义域问题结合起来，一并作为易忘的部分加以强化记忆，以免不必要的失分。

其实我们每做一道题，里面都蕴含着数学思想，圆锥曲线包容性更大，但是由于运算量较大，我们往往忽视总结其中的各种数学思想，如数形结合，分类讨论等。但是如果能够静下心来，仔细分析总结，就能更深刻的体会数学思想方法，并将其应用到其他类型的题目中去，取得更好的成绩。