2015－2016 学年度期末质量监控试卷

高三数学（文）

第Ⅰ卷（选择题　共40分）

一、　选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1．已知集合 $A=\{x\mid 0<x<2\}$，$B=\{x\mid x^2-1>0\}$，那么 $A\bigcap B=$

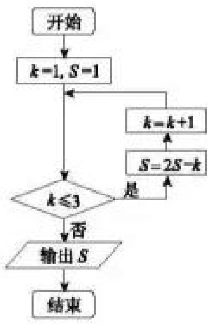
（A）$\{x\mid 0<x<1\}$　　（B）$\{x\mid 1<x<2\}$

（C）$\{x\mid -1<x<0\}$　　（D）$\{x\mid -1<x<2\}$

2．下列函数中，定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数是

（A）$y=x^2+1$　（B）$y=\tan x$　（C）$y=2^x$　（D）$y=x+\sin x$

3．执行如图所示的程序框图，输出的 S 值为



（A）1

（B）0

（C）-3

（D）-10

4．已知双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(b>0)$ 的一个焦点是 $(2,0)$，则其渐近线的方程为

（A）$x\pm\sqrt{3}y=0$　　（B）$\sqrt{3}x\pm y=0$

（C）$x\pm 3y=0$　　（D）$3x\pm y=0$

5．实数 x，y 满足 $\begin{cases}x+1\geqslant 0,\\ x-y+1\geqslant 0,\\ x+y-2\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $y-4x$ 的取值范围是

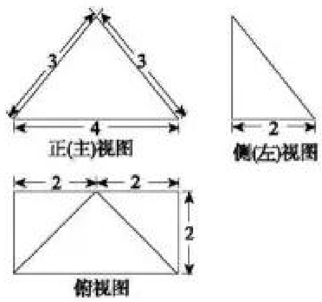
（A）$(-\infty,4]$　（B）$(-\infty,7]$　（C）$[-\dfrac{1}{2},4]$　（D）$[-\dfrac{1}{2},7]$

6．设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$是非零向量，且$\boldsymbol{a}\neq\pm\boldsymbol{b}$．则“$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$”是“$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

7．某四棱锥的三视图如图所示，该四棱锥的表面积是



（A）$20+2\sqrt{5}$

（B）$14+4\sqrt{5}$

（C）26

（D）$12+2\sqrt{5}$

8．8名象棋选手进行单循环赛（即每两名选手比赛一场）．规定两人对局胜者得2分，平局各得1分，负者得0分，并按总得分由高到低进行排序．比赛结束后，8名选手的得分各不相同，且第二名的得分与最后四名选手得分之和相等．则第二名选手的得分是

（A）14　　（B）13　　（C）12　　（D）11

第Ⅱ卷（非选择题　共 110 分）

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．

9．复数 $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=$____．

10．在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(1,1)$，$B(3,-1)$，则△AOB 的面积是____．

11．已知圆 $(x-1)^2+y^2=4$ 与抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 的准线相切，则 $p=$____．

12．函数 $y=\dfrac{x+4}{\sqrt{x}}$ 的定义域是____；最小值是____．

13．在△ABC 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c．若 $c=3$，$C=\dfrac{\pi}{3}$，$\sin B=2\sin A$，则 $a=$____．

14．设函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant a,\\ \log_3 x, & x>a,\end{cases}$ 其中 $a>0$．

① 若 $a=3$，则 $f[f(9)]=$____；

② 若函数 $y=f(x)-2$ 有两个零点，则 a 的取值范围是____．

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤．

15．（本小题满分 13 分）

在等差数列$\{a_n\}$中，$a_2=3$，$a_3+a_6=11$．

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）设$b_n=a_n+\dfrac{1}{2^{a_n}}$，其中$n\in\mathbf{N}^*$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$S_n$．

16．（本小题满分 13 分）

已知函数$f(x)=\sin(2\omega x-\dfrac{\pi}{6})+2\cos^2\omega x-1\ \ (\omega>0)$的最小正周期为$\pi$．

（Ⅰ）求ω的值；

（Ⅱ）求$f(x)$在区间$[0,\dfrac{7\pi}{12}]$上的最大值和最小值．

17．（本小题满分 13 分）

手机完全充满电量，在开机不使用的状态下，电池靠自身消耗一直到出现低电量警告之间所能维持的时间称为手机的待机时间．

为了解 A，B 两个不同型号手机的待机时间，现从某卖场库存手机中随机抽取 A，B 两个型号的手机各 5 台，在相同条件下进行测试，统计结果如下：

手机编号	1	2	3	4	5
A 型待机时间（h）	120	125	122	124	124
B 型待机时间（h）	118	123	127	120	a

已知 A，B 两个型号被测试手机待机时间的平均值相等．

（Ⅰ）求a的值；

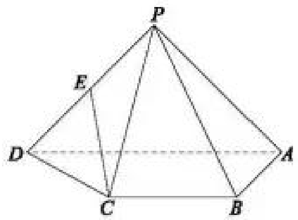
（Ⅱ）判断 A，B 两个型号被测试手机待机时间方差的大小（结论不要求证明）；

（Ⅲ）从被测试的手机中随机抽取 A，B 型号手机各 1 台，求至少有 1 台的待机时间超过 122 小时的概率．

（注：n个数据$x_1,x_2,\cdots,x_n$的方差$s^2=\dfrac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]$，其中$\overline{x}$为数据$x_1,x_2,\cdots,x_n$的平均数）

18.（本小题满分 14 分）

如图，在四棱锥$P-ABCD$中，$AD//BC$，$\angle BAD=90^{\circ}$，$PA=PD$，$AB\perp PA$，$AD=2$，$AB=BC=1$.



（Ⅰ）求证：$AB\perp PD$；

（Ⅱ）若E为PD的中点，求证：$CE//$平面PAB；

（Ⅲ）设平面$PAB\cap$平面$PCD=PM$，点M在平面$ABCD$上．当$PA\perp PD$时，求PM的长．

19.（本小题满分 14 分）

已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$的两个焦点是$F_1$，$F_2$，点$P(\sqrt{2},1)$在椭圆$C$上，且$|PF_1|+|PF_2|=4$.

（Ⅰ）求椭圆C的方程；

（Ⅱ）设点P关于x轴的对称点为Q，M是椭圆C上一点，直线MP和MQ与x轴分别相交于点E，F，O为原点．证明：$|OE|\cdot|OF|$为定值.

20.（本小题满分 13 分）

对于函数$f(x)$，若存在实数x_0满足$f(x_0)=x_0$，则称x_0为函数$f(x)$的一个不动点.

已知函数$f(x)=x^3+ax^2+bx+3$，其中$a,b\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）当$a=0$时，

（ⅰ）求$f(x)$的极值点；

（ⅱ）若存在x_0既是$f(x)$的极值点，又是$f(x)$的不动点，求b的值；

（Ⅱ）若$f(x)$有两个相异的极值点x_1，x_2，试问：是否存在a，b，使得x_1，x_2均为$f(x)$的不动点？证明你的结论.

北京市西城区 2016 — 2017 学年度第一学期期末

高三数学（文科）参考答案及评分标准

2017.1

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1．B　　2．D　　3．C　　4．B

5．A　　6．C　　7．A　　8．C

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9．i　　10．2　　11．2

12．$(0,+\infty)$；4　　13．$\sqrt{3}$　　14．$\sqrt{2}$；$[4,9)$

注：第 12，14 题第一空 2 分，第二空 3 分.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．其他正确解答过程，请参照评分标准给分.

15．（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，则有

$$\begin{cases}a_1+d=3,\\2a_1+7d=11.\end{cases}$$ ［4 分］

解得 $a_1=2$，$d=1$．［6 分］

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=a_1+(n-1)d=n+1$．［7 分］

（Ⅱ）$b_n=a_n+\dfrac{1}{2^{a_n}}=n+1+\dfrac{1}{2^{n+1}}$．［8 分］

因为数列$\{\dfrac{1}{2^{n+1}}\}$是首项为$\dfrac{1}{4}$，公比为$\dfrac{1}{2}$的等比数列，［9 分］

所以 $S_n=\dfrac{n(n+3)}{2}+\dfrac{\frac{1}{4}[1-(\frac{1}{2})^n]}{1-\frac{1}{2}}$ ［11 分］

$=\dfrac{n^2+3n+1}{2}-\dfrac{1}{2^{n+1}}$．［13 分］

16.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $f(x)=\sin(2\omega x-\frac{\pi}{6})+(2\cos^2\omega x-1)$

$=(\sin 2\omega x\cos\frac{\pi}{6}-\cos 2\omega x\sin\frac{\pi}{6})+\cos 2\omega x$ ［4 分］

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\omega x+\frac{1}{2}\cos 2\omega x$

$=\sin(2\omega x+\frac{\pi}{6})$， ［6 分］

所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2\omega}=\pi$，

解得 $\omega=1$． ［7 分］

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$．

因为 $0\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{12}$，所以 $\frac{\pi}{6}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{4\pi}{3}$． ［9 分］

所以，当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，$f(x)$ 取得最大值为 1； ［11 分］

当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{4\pi}{3}$，即 $x=\frac{7\pi}{12}$ 时，$f(x)$ 取得最小值为 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$． ［13 分］

17.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）$\overline{x_A}=120+\frac{0+5+2+4+4}{5}=123\,(\mathrm{h})$， ［2 分］

$\overline{x_B}=120+\frac{-2+3+7+0+(a-120)}{5}$， ［3 分］

由 $\overline{x_A}=\overline{x_B}$， 解得 $a=127$． ［4 分］

（Ⅱ）设 A，B 两个型号被测试手机的待机时间的方差依次为 s_A^2， s_B^2，

则 $s_A^2<s_B^2$． ［7 分］

（Ⅲ）设 A 型号手机为 A_1，A_2，A_3，A_4，A_5；B 型号手机为 B_1，B_2，B_3，B_4，B_5，

“至少有 1 台的待机时间超过 122 小时”为事件 C． ［8 分］

从被测试的手机中随机抽取 A，B 型号手机各 1 台，不同的抽取方法有 25 种．

［10 分］

抽取的两台手机待机时间都不超过122小时的选法有：

(A_1, B_1)，(A_1, B_4)，(A_3, B_1)，(A_3, B_4)，共4种. [11分]

因此 $P(\overline{C}) = \frac{4}{25}$， 所以 $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = \frac{21}{25}$.

所以 至少有1台的待机时间超过122小时的概率是 $\frac{21}{25}$. [13分]

18.（本小题满分14分）

解：（Ⅰ）因为 $\angle BAD = 90^\circ$，

所以 $AB \perp AD$， [1分]

又因为 $AB \perp PA$， [2分]

所以 $AB \perp$ 平面 PAD， [3分]

所以 $AB \perp PD$. [4分]

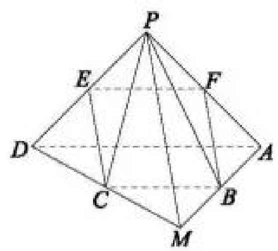
（Ⅱ）取 PA 的中点 F，连接 BF，EF. [5分]

因为 E 为棱 PD 中点，所以 $EF // AD$，$EF = \frac{1}{2}AD$，

又因为 $BC // AD$，$BC = \frac{1}{2}AD$，

所以 $BC // EF$，$BC = EF$.

所以四边形 $BCEG$ 是平行四边形，$EC // BF$. [8分]



又 $BF \subset$ 平面 PAB，$CE \not\subset$ 平面 PAB，

所以 $CE //$ 平面 PAB. [9分]

（Ⅲ）在平面 $ABCD$ 上，延长 AB，CD 交于点 M.

因为 $M \in AB$，所以 $M \in$ 平面 PAB； 又 $M \in CD$，所以 $M \in$ 平面 PCD，

所以 平面 $PAB \cap$ 平面 $PCD = PM$. [11分]

在△ADM 中，因为 $BC // AD$，$BC = \frac{1}{2}AD$，

所以 $AM = 2AB = 2$. [12分]

因为 $PA \perp PD$，所以△APD 是等腰直角三角形，所以 $PA = \sqrt{2}$. [13分]

由（Ⅰ）得 $AM \perp$ 平面 PAD， 所以 $AM \perp PA$.

在直角△PAM 中，$PM = \sqrt{PA^2 + AM^2} = \sqrt{6}$. [14分]

19．（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）由椭圆的定义，得 $|PF_1|+|PF_2|=2a=4$，$a=2$． ［2 分］

将点 $P(\sqrt{2},1)$ 的坐标代入 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$， 得 $\dfrac{2}{4}+\dfrac{1}{b^2}=1$，

解得 $b=\sqrt{2}$． ［4 分］

所以，椭圆 C 的方程是 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$． ［5 分］

（Ⅱ）依题意，得 $Q(\sqrt{2},-1)$．

设 $M\left(x_0,y_0\right)$，则有 $x_0{}^2+2y_0{}^2=4$，$x_0\neq\sqrt{2}$，$y_0\neq\pm1$． ［6 分］

直线 MP 的方程为 $y-1=\dfrac{y_0-1}{x_0-\sqrt{2}}(x-\sqrt{2})$， ［7 分］

令 $y=0$，得 $x=\dfrac{\sqrt{2}y_0-x_0}{y_0-1}$， ［8 分］

所以 $|OE|=\left|\dfrac{\sqrt{2}y_0-x_0}{y_0-1}\right|$．

直线 MQ 的方程为 $y+1=\dfrac{y_0+1}{x_0-\sqrt{2}}(x-\sqrt{2})$， ［9 分］

令 $y=0$，得 $x=\dfrac{\sqrt{2}y_0+x_0}{y_0+1}$， ［10 分］

所以 $|OF|=\left|\dfrac{\sqrt{2}y_0+x_0}{y_0+1}\right|$．

所以 $|OE|\cdot|OF|=\left|\dfrac{\sqrt{2}y_0-x_0}{y_0-1}\right|\cdot\left|\dfrac{\sqrt{2}y_0+x_0}{y_0+1}\right|=\left|\dfrac{2y_0^2-x_0^2}{y_0^2-1}\right|$

$=\left|\dfrac{2y_0^2-(4-2y_0^2)}{y_0^2-1}\right|$ ［12 分］

$=4$．

所以 $|OE|\cdot|OF|$ 为定值． ［14 分］

20.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，且 $f'(x)=3x^2+2ax+b$． [1 分]

当 $a=0$ 时，$f'(x)=3x^2+b$．

（ⅰ）① 当 $b\geqslant 0$ 时，显然 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，无极值点． [2 分]

② 当 $b<0$ 时，令 $f'(x)=0$，解得 $x=\pm\sqrt{-\frac{b}{3}}$． [3 分]

$f(x)$ 和 $f'(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,-\sqrt{-\frac{b}{3}})$	$-\sqrt{-\frac{b}{3}}$	$(-\sqrt{-\frac{b}{3}},\sqrt{-\frac{b}{3}})$	$\sqrt{-\frac{b}{3}}$	$(\sqrt{-\frac{b}{3}},+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

所以，$x=-\sqrt{-\frac{b}{3}}$ 是 $f(x)$ 的极大值点；$x=\sqrt{-\frac{b}{3}}$ 是 $f(x)$ 的极小值点． [5 分]

（ⅱ）若 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的极值点，则有 $3x_0^2+b=0$；

若 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的不动点，则有 $x_0^3+bx_0+3=x_0$．

从上述两式中消去 b，

整理得 $2x_0^3+x_0-3=0$． [6 分]

设 $g(x)=2x^3+x-3$．

所以 $g'(x)=6x^2+1>0$，$g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增．

又 $g(1)=0$，所以函数 $g(x)$ 有且仅有一个零点 $x=1$，

即方程 $2x_0^3+x_0-3=0$ 的根为 $x_0=1$，

所以 $b=-3x_0^2=-3$． [8 分]

（Ⅱ）因为 $f(x)$ 有两个相异的极值点 x_1，x_2，

所以方程 $3x^2+2ax+b=0$ 有两个不等实根 x_1，x_2，

所以 $\varDelta=4a^2-12b>0$，即 $a^2-3b>0$． [9 分]

假设存在实数 a，b，使得 x_1，x_2 均为 $f(x)$ 的不动点，则 x_1，x_2 是方程

$x^3+ax^2+(b-1)x+3=0$ 的两个实根，显然 x_1，$x_2 \neq 0$.

对于实根 x_1，有 $x_1^3+ax_1^2+(b-1)x_1+3=0$.　　①

又因为 $3x_1^2+2ax_1+b=0$.　　②

①×3−②×x_1，得 $ax_1^2+(2b-3)x_1+9=0$.

同理可得 $ax_2^2+(2b-3)x_2+9=0$.

所以，方程 $ax^2+(2b-3)x+9=0$ 也有两个不等实根 x_1，x_2.　　[11 分]

所以 $x_1+x_2=-\dfrac{2b-3}{a}$.

对于方程 $3x^2+2ax+b=0$，有 $x_1+x_2=-\dfrac{2a}{3}$，

所以 $-\dfrac{2a}{3}=-\dfrac{2b-3}{a}$，即 $a^2-3b=-\dfrac{9}{2}$，

这与 $a^2-3b>0$ 相矛盾！

所以，不存在 a，b，使得 x_1，x_2 均为 $f(x)$ 的不动点.　　[13 分]