

2016-2017 学年高一（上）期中数学试卷（B 卷）

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 若集合 $A = \{x | x > -1\}$ ，则（ ）

A. $0 \subseteq A$ B. $\{0\} \subseteq A$ C. $\{0\} \in A$ D. $\emptyset \in A$

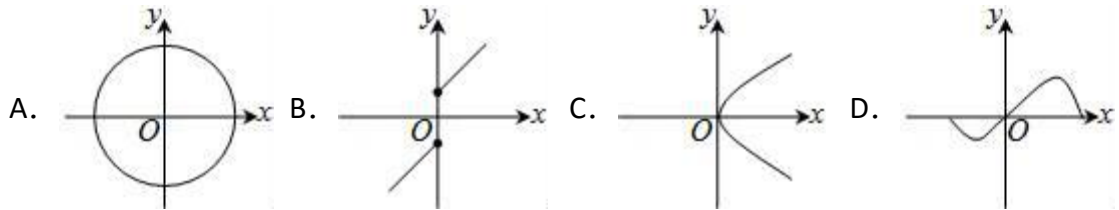
2. 不论 a, b 为何实数， $a^2 + b^2 - 2a - 4b + 8$ 的值（ ）

A. 总是正数 B. 总是负数
C. 可以是零 D. 可以是正数也可以是负数

3. 已知集合 $A = \{-1, 1\}$ ， $B = \{x | ax + 2 = 0\}$ ，若 $B \subseteq A$ ，则实数 a 的所有可能取值的集合为（ ）

A. $\{-2\}$ B. $\{2\}$ C. $\{-2, 2\}$ D. $\{-2, 0, 2\}$

4. 下列各图中，可表示函数 $y = f(x)$ 的图象的只可能是（ ）



5. 设函数 $f(x) = 2x + 1$ 的定义域为 $[1, 5]$ ，则函数 $f(2x - 3)$ 的定义域为（ ）

A. $[1, 5]$ B. $[3, 11]$ C. $[3, 7]$ D. $[2, 4]$

6. 已知函数 $f(x) = \frac{kx+7}{kx^2+4kx+3}$ ，若 $\forall x \in \mathbb{R}$ ，则 k 的取值范围是（ ）

A. $0 \leq k < \frac{3}{4}$ B. $0 < k < \frac{3}{4}$ C. $k < 0$ 或 $k > \frac{3}{4}$ D. $0 < k \leq \frac{3}{4}$

7. 函数 $f(x) = \frac{1}{1-x(1-x)}$ 的最大值是（ ）

A. $\frac{4}{5}$ B. $\frac{5}{4}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{4}{3}$

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0 \\ f(x-1) - f(x-2), & x > 0 \end{cases}$ ，则 $f(3)$ 的值等于（ ）

A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 - ax - 5 & (x \leq 1) \\ \frac{a}{x} & (x > 1) \end{cases}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的增函数，则 a 的取值范围是

()

A. $-3 \leq a < 0$ B. $-3 \leq a \leq -2$ C. $a \leq -2$ D. $a < 0$

10. $f(x) = x^2 - 2x$, $g(x) = ax + 2$ ($a > 0$), 若对任意的 $x_1 \in [-1, 2]$, 存在 $x_0 \in [-1, 2]$, 使 $g(x_1) = f(x_0)$, 则 a 的取值范围是 ()

A. $(0, \frac{1}{2}]$ B. $[\frac{1}{2}, 3]$ C. $[3, +\infty)$ D. $(0, 3]$

11. 已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -2)$ 上是减函数, 若 $g(x) = f(x - 2)$ 是奇函数, 且 $g(2) = 0$, 则不等式 $xf(x) \leq 0$ 的解集是 ()

A. $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ B. $[-4, -2] \cup [0, +\infty)$ C. $(-\infty, -4] \cup [-2, +\infty)$ D. $(-\infty, -4] \cup [0, +\infty)$

12. 已知 $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \geq 0 \\ x^2 + 2x, & x < 0 \end{cases}$, 则 $f(f(x)) \leq 3$ 的解集为 ()

A. $(-\infty, -3]$ B. $[-3, +\infty)$ C. $(-\infty, \sqrt{3}]$ D. $[\sqrt{3}, +\infty)$

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案直接答在答题纸上.

13. 函数 $y = |x^2 - 4x|$ 的增区间是_____.

14. 已知一次函数 $y = x + 1$ 与二次函数 $y = x^2 - x - 1$ 的图象交于两点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} =$ _____.

15. 设 $f(x) = 1 - 2x^2$, $g(x) = x^2 - 2x$, 若 $F(x) = \begin{cases} g(x) & f(x) \geq g(x) \\ f(x) & f(x) < g(x) \end{cases}$, 则 $F(x)$ 的最大值为_____.

16. 已知 $x \in \mathbb{R}$, 符号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 若函数 $f(x) = \frac{[x]}{x}$ ($x > 0$), 则给出以下四个结论:

①函数 $f(x)$ 的值域为 $[0, 1]$;

②函数 $f(x)$ 的图象是一条曲线;

③函数 $f(x)$ 是 $(0, +\infty)$ 上的减函数;

④函数 $g(x) = f(x) - a$ 有且仅有 3 个零点时 $\frac{3}{4} < a \leq \frac{4}{5}$.

其中正确的序号为_____.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. 设集合 $A = \{x | 2 \leq x \leq 4\}$, $B = \{x | x > 3, \text{ 或 } x < 1\}$, $C = \{x | t+1 < x < 2t\}$, $t \in \mathbb{R}$.

(I) 求 $A \cup C \cup B$;

(II) 若 $A \cap C = C$, 求 t 的取值范围.

18. 已知函数 $f(x) = 1 + \frac{|x| - x}{2}$ ($-2 < x \leq 2$)

(1) 用分段函数的形式表示该函数;

(2) 画出该函数的图象;

(3) 写出该函数的值域、单调区间.

19. 函数 $f(x) = 2x - \frac{a}{x}$ 的定义域为 $(0, 1]$ (a 为实数).

(1) 当 $a=1$ 时, 求函数 $y=f(x)$ 的值域;

(2) 若函数 $y=f(x)$ 在定义域上是减函数, 求 a 的取值范围.

20. 若二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 满足 $f(x+1) - f(x) = 2x$, 且 $f(0) = 1$.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 若在区间 $[-1, 1]$ 上, 不等式 $f(x) > 2x + m$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

21. 已知函数 $f(x)$ 在其定义域 $(0, +\infty)$, $f(2) = 1$, $f(xy) = f(x) + f(y)$, 当 $x > 1$ 时, $f(x) > 0$;

(1) 求 $f(8)$ 的值;

(2) 讨论函数 $f(x)$ 在其定义域 $(0, +\infty)$ 上的单调性;

(3) 解不等式 $f(x) + f(x-2) \leq 3$.

22. 设函数 $f(x) = x^2 - 2tx + 2$, 其中 $t \in \mathbb{R}$.

(1) 若 $t=1$, 求函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 4]$ 上的取值范围;

(2) 若 $t=1$, 且对任意的 $x \in [a, a+2]$, 都有 $f(x) \leq 5$, 求实数 a 的取值范围.

(3) 若对任意的 $x_1, x_2 \in [0, 4]$, 都有 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq 8$, 求 t 的取值范围.

2016-2017 学年河北省衡水市冀州中学高一（上）期中数学试卷（B 卷）

参考答案与试题解析

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 若集合 $A = \{x | x > -1\}$ ，则（ ）

A. $0 \subseteq A$ B. $\{0\} \subseteq A$ C. $\{0\} \in A$ D. $\emptyset \in A$

【考点】12：元素与集合关系的判断．

【分析】利用集合与元素的关系应当是属于关系、集合与集合之间的关系应当是包含关系进行判断即可．

【解答】解：A. $0 \subseteq A$ 错误，应当是 $0 \in A$ ，集合与元素的关系应当是属于关系；

B. 集合与集合之间的关系应当是包含关系，故 B 正确；

C. 集合与集合之间的关系应当是包含关系，故 C 不正确；

D. 空集是任何集合的子集，故 D 不正确．

故选：B．

2. 不论 a, b 为何实数， $a^2 + b^2 - 2a - 4b + 8$ 的值（ ）

A. 总是正数 B. 总是负数

C. 可以是零 D. 可以是正数也可以是负数

【考点】71：不等关系与不等式．

【分析】利用配方法把代数式 $a^2 + b^2 - 2a - 4b + 8$ 变形为几个完全平方的形式后即可判断．

【解答】解： $\because a^2 + b^2 - 2a - 4b + 8 = (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 4b + 4) + 3 = (a - 1)^2 + (b - 2)^2 + 3 \geq 3$ ，

故不论 a, b 取何值代数式 $a^2 + b^2 - 2a - 4b + 8$ 恒为正数．

故选 A．

3. 已知集合 $A = \{-1, 1\}$, $B = \{x | ax + 2 = 0\}$, 若 $B \subseteq A$, 则实数 a 的所有可能取值的集合为 ()

- A. $\{-2\}$ B. $\{2\}$ C. $\{-2, 2\}$ D. $\{-2, 0, 2\}$

【考点】18: 集合的包含关系判断及应用.

【分析】根据 $B \subseteq A$, 利用分类讨论思想求解即可.

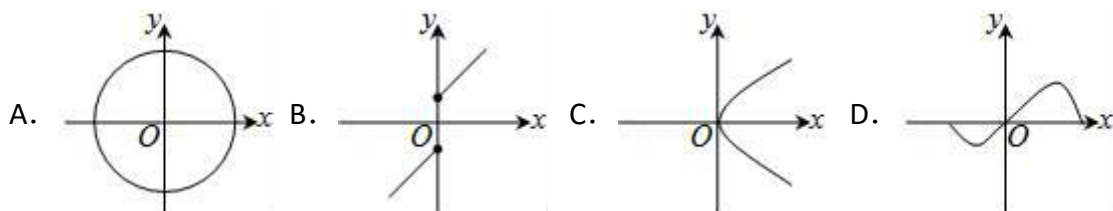
【解答】解: 当 $a=0$ 时, $B=\emptyset$, $B \subseteq A$;

当 $a \neq 0$ 时, $B = \{-\frac{2}{a}\} \subseteq A$, $-\frac{2}{a} = 1$ 或 $-\frac{2}{a} = -1 \Rightarrow a = -2$ 或 2 ,

综上实数 a 的所有可能取值的集合为 $\{-2, 0, 2\}$.

故选 D.

4. 下列各图中, 可表示函数 $y=f(x)$ 的图象的只可能是 ()



【考点】30: 函数的图象; 31: 函数的概念及其构成要素.

【分析】根据函数的概念得: 因变量 (函数), 随着自变量的变化而变化, 且自变量取唯一值时, 因变量 (函数) 有且只有唯一值与其相对应, 结合图象特征进行判断即可.

【解答】解: 根据函数的定义知:

自变量取唯一值时, 因变量 (函数) 有且只有唯一值与其相对应.

$\therefore$ 从图象上看, 任意一条与 x 轴垂直的直线与函数图象的交点最多只能有一个交点.

从而排除 A, B, C,

故选 D.

5. 设函数 $f(x) = 2x + 1$ 的定义域为 $[1, 5]$, 则函数 $f(2x - 3)$ 的定义域为 ()

- A. $[1, 5]$ B. $[3, 11]$ C. $[3, 7]$ D. $[2, 4]$

【考点】33: 函数的定义域及其求法.

【分析】由题意知 $1 \leq 2x - 3 \leq 5$, 求出 x 的范围并用区间表示, 是所求函数的定

义域.

【解答】解：∵函数 $f(x)$ 的定义域为 $[1, 5]$,

∴ $1 \leq 2x - 3 \leq 5$, 解得 $2 \leq x \leq 4$,

∴ 所求函数 $f(2x - 3)$ 的定义域是 $[2, 4]$.

故选 D.

6. 已知函数 $f(x) = \frac{kx+7}{kx^2+4kx+3}$, 若 $\forall x \in \mathbb{R}$, 则 k 的取值范围是 ()

A. $0 \leq k < \frac{3}{4}$ B. $0 < k < \frac{3}{4}$ C. $k < 0$ 或 $k > \frac{3}{4}$ D. $0 < k \leq \frac{3}{4}$

【考点】3R: 函数恒成立问题.

【分析】本选择题利用特殊值法解决, 观察几个选项知, 当 $k=0$ 时, 看是否能保证 $\forall x \in \mathbb{R}$, 如能, 则即可得出正确选项.

【解答】解: 考虑 k 的特殊值: $k=0$,

当 $k=0$ 时, $f(x) = \frac{7}{3}$, 此时: $\forall x \in \mathbb{R}$,

对照选项排除 B, C, D.

故选 A.

7. 函数 $f(x) = \frac{1}{1-x(1-x)}$ 的最大值是 ()

A. $\frac{4}{5}$ B. $\frac{5}{4}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{4}{3}$

【考点】7F: 基本不等式; 3H: 函数的最值及其几何意义.

【分析】把分母整理成 $= (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ 进而根据二次函数的性质求得其最小值, 则函数 $f(x)$ 的最大值可求.

【解答】解: ∵ $1 - x(1 - x) = 1 - x + x^2 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$,

∴ $f(x) = \frac{1}{1-x(1-x)} \leq \frac{4}{3}$, $f(x)_{\max} = \frac{4}{3}$.

故选 D

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0 \\ f(x-1) - f(x-2), & x > 0 \end{cases}$, 则 $f(3)$ 的值等于 ()

A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

【考点】3T：函数的值.

【分析】根据分段函数的表达式直接代入即可.

【解答】解：由分段函数可知， $f(3) = f(2) - f(1)$ ，

而 $f(2) = f(1) - f(0)$ ，

$$\therefore f(3) = f(2) - f(1) = f(1) - f(0) - f(1) = -f(0) = -1,$$

故选：B.

9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 - ax - 5 & (x \leq 1) \\ \frac{a}{x} & (x > 1) \end{cases}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的增函数，则 a 的取值范围是

()

A. $-3 \leq a < 0$ B. $-3 \leq a \leq -2$ C. $a \leq -2$ D. $a < 0$

【考点】3F：函数单调性的性质；3W：二次函数的性质.

【分析】由函数 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的增函数可得函数，设 $g(x) = -x^2 - ax - 5$ ， $h(x) = \frac{a}{x}$ ，则可知函数 $g(x)$ 在 $x \leq 1$ 时单调递增，函数 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增，且 $g(1) \leq h(1)$ ，从而可求

【解答】解： $\because$ 函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 - ax - 5, & (x \leq 1) \\ \frac{a}{x}, & (x > 1) \end{cases}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的增函数

设 $g(x) = -x^2 - ax - 5$ ($x \leq 1$)， $h(x) = \frac{a}{x}$ ($x > 1$)

由分段函数的性质可知，函数 $g(x) = -x^2 - ax - 5$ 在 $(-\infty, 1]$ 单调递增，函数

$h(x) = \frac{a}{x}$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增，且 $g(1) \leq h(1)$

$$\therefore \begin{cases} -\frac{a}{2} \geq 1 \\ a < 0 \\ -a - 6 \leq a \end{cases}$$
$$\therefore \begin{cases} a \leq -2 \\ a < 0 \\ a \geq -3 \end{cases}$$

解可得， $-3 \leq a \leq -2$

故选 B

10. $f(x) = x^2 - 2x$, $g(x) = ax + 2$ ($a > 0$), 若对任意的 $x_1 \in [-1, 2]$, 存在 $x_0 \in [-1, 2]$, 使 $g(x_1) = f(x_0)$, 则 a 的取值范围是 ()

A. $(0, \frac{1}{2}]$ B. $[\frac{1}{2}, 3]$ C. $[3, +\infty)$ D. $(0, 3]$

【考点】34: 函数的值域; 18: 集合的包含关系判断及应用.

【分析】先求出两个函数在 $[-1, 2]$ 上的值域分别为 A、B, 再根据对任意的 $x_1 \in [-1, 2]$, 存在 $x_0 \in [-1, 2]$, 使 $g(x_1) = f(x_0)$, 集合 B 是集合 A 的子集, 并列出不等式, 解此不等式组即可求得实数 a 的取值范围, 注意条件 $a > 0$.

【解答】解: 设 $f(x) = x^2 - 2x$, $g(x) = ax + 2$ ($a > 0$), 在 $[-1, 2]$ 上的值域分别为 A、B,

由题意可知: $A = [-1, 3]$, $B = [-a + 2, 2a + 2]$

$$\therefore \begin{cases} -a + 2 \geq -1 \\ 2a + 2 \leq 3 \end{cases}$$

$$\therefore a \leq \frac{1}{2}$$

又 $\because a > 0$,

$$\therefore 0 < a \leq \frac{1}{2}$$

故选: A

11. 已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -2)$ 上是减函数, 若 $g(x) = f(x - 2)$ 是奇函数, 且 $g(2) = 0$, 则不等式 $xf(x) \leq 0$ 的解集是 ()

A. $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ B. $[-4, -2] \cup [0, +\infty)$ C. $(-\infty, -4] \cup [-2, +\infty)$ D. $(-\infty, -4] \cup [0, +\infty)$

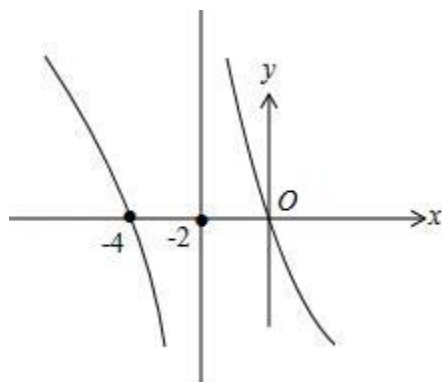
【考点】3N: 奇偶性与单调性的综合.

【分析】由 $g(x) = f(x - 2)$ 是奇函数, 可得 $f(x)$ 的图象关于 $(-2, 0)$ 中心对称, 再由已知可得函数 $f(x)$ 的三个零点为 $-4, -2, 0$, 画出 $f(x)$ 的大致形状, 数形结合得答案.

【解答】解: 由 $g(x) = f(x - 2)$ 是把函数 $f(x)$ 向右平移 2 个单位得到的, 且 $g(2) = g(0) = 0$,

$f(-4)=g(-2)=-g(2)=0$, $f(-2)=g(0)=0$, 结合函数的图象可知,
当 $x \leq -4$ 或 $x \geq -2$ 时, $xf(x) \leq 0$.

故选: C.



12. 已知 $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \geq 0 \\ x^2+2x, & x < 0 \end{cases}$, 则 $f(f(x)) \leq 3$ 的解集为 ()

A. $(-\infty, -3]$ B. $[-3, +\infty)$ C. $(-\infty, \sqrt{3}]$ D. $[\sqrt{3}, +\infty)$

【考点】7E: 其他不等式的解法; 5B: 分段函数的应用.

【分析】由已知条件根据分段函数的表达式进行求解即可求出 $f(f(x)) \leq 3$ 的解集.

【解答】解: 设 $t=f(x)$,

则不等式 $f(f(x)) \leq 3$ 等价于 $f(t) \leq 3$,

作出 $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \geq 0 \\ x^2+2x, & x < 0 \end{cases}$ 的图象, 如右图,

由图象知 $t \geq -3$ 时, $f(t) \leq 3$,

即 $f(x) \geq -3$ 时, $f(f(x)) \leq 3$.

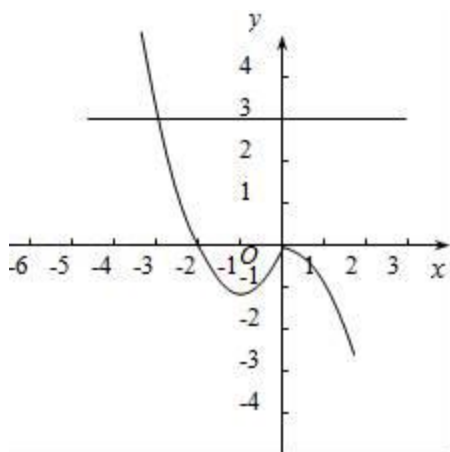
若 $x \geq 0$, 由 $f(x) = -x^2 \geq -3$ 得 $x^2 \leq 3$, 解得 $0 \leq x \leq \sqrt{3}$,

若 $x < 0$, 由 $f(x) = x^2+2x \geq -3$, 得 $x^2+2x+3 \geq 0$,

解得 $x < 0$, 综上 $x \leq \sqrt{3}$,

即不等式的解集为 $(-\infty, \sqrt{3}]$,

故选: C.



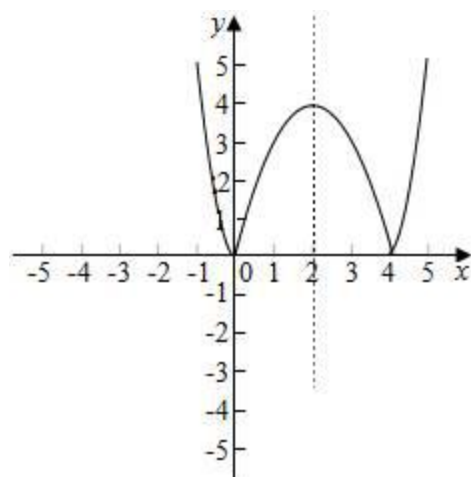
二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．把答案直接答在答题纸上．

13. 函数 $y = |x^2 - 4x|$ 的增区间是 $[0, 2]$ 和 $[4, +\infty)$ ．

【考点】5B：分段函数的应用．

【分析】画出函数 $y = |x^2 - 4x|$ 的图象，数形结合可得答案．

【解答】解：函数 $y = |x^2 - 4x| = \begin{cases} x^2 - 4x, & x \leq 0, \text{ 或 } x \geq 4 \\ -x^2 + 4x, & 0 < x < 4 \end{cases}$ 的图象如下图所示：



由图可得：函数 $y = |x^2 - 4x|$ 的增区间是 $[0, 2]$ 和 $[4, +\infty)$ ，（区间端点可以为开），故答案为： $[0, 2]$ 和 $[4, +\infty)$

14. 已知一次函数 $y = x + 1$ 与二次函数 $y = x^2 - x - 1$ 的图象交于两点 A (x_1, y_1) ，B (x_2, y_2) ，则 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \underline{-1}$ ．

【考点】30：函数的图象．

【分析】联立方程组得 $\begin{cases} y=x+1 \\ y=x^2-x-1 \end{cases}$ ，化简得到 $x^2 - 2x - 2=0$ ，根据韦达定理得到

$x_1+x_2=2$ ， $x_1 \cdot x_2 = -2$ ，即可求出答案.

【解答】解：联立方程组得 $\begin{cases} y=x+1 \\ y=x^2-x-1 \end{cases}$ ，

$$\therefore x^2 - x - 1 = x + 1,$$

$$\therefore x^2 - 2x - 2 = 0,$$

$$\therefore x_1 + x_2 = 2, \quad x_1 \cdot x_2 = -2,$$

$$\therefore \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{2}{-2} = -1,$$

故答案为：-1.

15. 设 $f(x) = 1 - 2x^2$ ， $g(x) = x^2 - 2x$ ，若 $F(x) = \begin{cases} g(x) & f(x) \geq g(x) \\ f(x) & f(x) < g(x) \end{cases}$ ，则 $F(x)$

的最大值为 $\frac{7}{9}$.

【考点】3H：函数的最值及其几何意义.

【分析】求出 $F(x)$ 的解析式，在每一段上分别求最大值，综合得结论.

【解答】解：有已知得 $F(x) = \begin{cases} f(x) & , x \leq -\frac{1}{3} \text{ 或 } x \geq 1 \\ g(x) & -\frac{1}{3} < x < 1 \end{cases} = \begin{cases} 1-2x^2 & , x \leq -\frac{1}{3} \text{ 或 } x \geq 1 \\ x^2-2x & -\frac{1}{3} < x < 1 \end{cases}$,

$y=1-2x^2$ 在 $x \leq -\frac{1}{3}$ 上的最大值是 $\frac{7}{9}$ ，在 $x \geq 1$ 上的最大值是 -1， $y=x^2-2x$ 在

$-\frac{1}{3} < x < 1$ 上无最大值.

故则 $F(x)$ 的最大值为 $\frac{7}{9}$

故答案为： $\frac{7}{9}$.

16. 已知 $x \in \mathbb{R}$ ，符号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，若函数 $f(x) = \frac{[x]}{x}$ ($x > 0$)，

则给出以下四个结论：

①函数 $f(x)$ 的值域为 $[0, 1]$ ；

②函数 $f(x)$ 的图象是一条曲线;

③函数 $f(x)$ 是 $(0, +\infty)$ 上的减函数;

④函数 $g(x) = f(x) - a$ 有且仅有 3 个零点时 $\frac{3}{4} < a \leq \frac{4}{5}$.

其中正确的序号为 ④.

【考点】54: 根的存在性及根的个数判断; 3E: 函数单调性的判断与证明.

【分析】通过举特例, 可得①、②、③错误; 数形结合可得④正确, 从而得出结论.

【解答】解: 由于符号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 函数 $f(x) = \frac{[x]}{x} (x > 0)$,

取 $x = -1.1$, 则 $[x] = -2$, $\therefore f(x) = \frac{-2}{-1.1} > 1$, 故①不正确.

由于当 $0 < x < 1$, $[x] = 0$, 此时 $f(x) = 0$;

当 $1 \leq x < 2$, $[x] = 1$, 此时 $f(x) = \frac{1}{x}$;

当 $2 \leq x < 3$, $[x] = 2$, 此时 $f(x) = \frac{2}{x}$, 此时 $\frac{2}{3} < f(x) \leq 1$,

当 $3 \leq x < 4$, $[x] = 3$, 此时 $f(x) = \frac{3}{x}$, 此时 $\frac{3}{4} < g(x) \leq 1$,

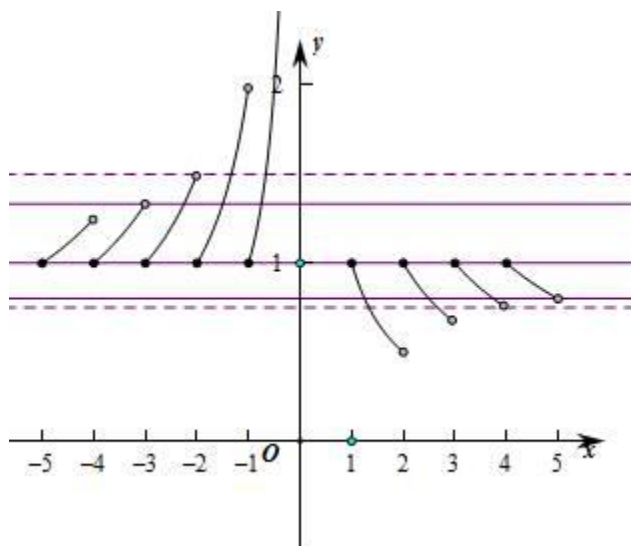
当 $4 \leq x < 5$, $[x] = 4$, 此时 $f(x) = \frac{4}{x}$, 此时 $\frac{4}{5} < g(x) \leq 1$,

故 $f(x)$ 的图象不会是一条曲线, 且 $f(x)$ 不会是 $(0, +\infty)$ 上的减函数, 故排除②、③.

函数 $g(x) = f(x) - a$ 有且仅有 3 个零点时, 函数 $f(x)$ 的图象和直线 $y = a$ 有且仅有 3 个交点,

此时, $\frac{3}{4} < a \leq \frac{4}{5}$, 故④正确,

故答案为: ④.



三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. 设集合 $A = \{x | 2 \leq x \leq 4\}$, $B = \{x | x > 3, \text{ 或 } x < 1\}$, $C = \{x | t+1 < x < 2t\}$, $t \in \mathbb{R}$.

(I) 求 $A \cup C_{\mathbb{U}}B$;

(II) 若 $A \cap C = C$, 求 t 的取值范围.

【考点】1E: 交集及其运算; 1H: 交、并、补集的混合运算.

【分析】(I) 由 B 与全集 $\mathbb{U}$, 求出 B 的补集, 找出 A 与 B 补集的并集即可;

(II) 由 A 与 C 的交集为 C , 得到 C 为 A 的子集, 确定出 t 的范围即可.

【解答】解: (I) $\because B = \{x | x > 3, \text{ 或 } x < 1\}$,

$$\therefore C_{\mathbb{U}}B = \{x | 1 \leq x \leq 3\},$$

$$\because A = \{x | 2 \leq x \leq 4\},$$

$$\therefore A \cup C_{\mathbb{U}}B = \{x | 1 \leq x \leq 4\};$$

(II) $\because A \cap C = C$, $\therefore C \subseteq A$,

当 $C = \emptyset$ 时, 则有 $2t \leq t+1$, 即 $t \leq 1$;

$$\text{当 } C \neq \emptyset \text{ 时, 则 } \begin{cases} t+1 \geq 2 \\ 2t \leq 4 \\ t+1 < 2t \end{cases}, \text{ 即 } 1 < t \leq 2,$$

综上所述, t 的范围是 $t \leq 2$.

18. 已知函数 $f(x) = 1 + \frac{|x| - x}{2}$ ($-2 < x \leq 2$)

(1) 用分段函数的形式表示该函数;

(2) 画出该函数的图象;

(3) 写出该函数的值域、单调区间.

【考点】 30: 函数的图象; 3B: 分段函数的解析式求法及其图象的作法; 3D: 函数的单调性及单调区间.

【分析】 (1) 根据 x 的符号分 $-2 < x \leq 0$ 和 $0 < x \leq 2$ 两种情况, 去掉绝对值求出函数的解析式;

(2) 根据 (1) 的函数解析式, 画出函数的图象;

(3) 根据函数的图象求出函数的值域和函数单调区间.

【解答】 解 (1) 由题意知, $f(x) = 1 + \frac{|x| - x}{2}$ ($-2 < x \leq 2$),

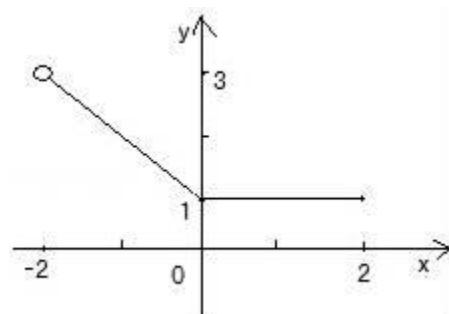
当 $-2 < x \leq 0$ 时, $f(x) = 1 - x$, 当 $0 < x \leq 2$ 时, $f(x) = 1$,

$$\text{则 } f(x) = \begin{cases} 1-x & (-2 < x \leq 0) \\ 1 & (0 < x \leq 2) \end{cases}$$

(2) 函数图象如图:

(3) 由 (2) 的图象得, 函数的值域为 $[1, 3]$,

函数的单调减区间为 $(-2, 0]$.



19. 函数 $f(x) = 2x - \frac{a}{x}$ 的定义域为 $(0, 1]$ (a 为实数).

(1) 当 $a=1$ 时, 求函数 $y=f(x)$ 的值域;

(2) 若函数 $y=f(x)$ 在定义域上是减函数, 求 a 的取值范围.

【考点】 3N: 奇偶性与单调性的综合; 34: 函数的值域.

【分析】 (1) 当 $a=1$ 时, $f(x) = 2x - \frac{1}{x}$, 根据函数单调性“增”+“增”=“增”, 可得

$f(x) = 2x - \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1]$ 上单调递增，当 $x=1$ 时取得最大值 $f(1) = 1$ ，无最小值，进而得到函数 $y=f(x)$ 的值域；

(2) 若函数 $y=f(x)$ 在定义域上是减函数，则任取 $x_1, x_2 \in (0, 1]$ 且 $x_1 < x_2$ ，都有 $f(x_1) > f(x_2)$ 成立，即 $(x_1 - x_2)(2 + \frac{a}{x_1 x_2}) > 0$ 恒成立，进而可得 a 的取值范围。

【解答】解：(1) 当 $a=1$ 时， $f(x) = 2x - \frac{1}{x}$ ，

当 $x \in (0, 1]$ 时， $y_1 = 2x$ 和 $y_2 = -\frac{1}{x}$ 均单调递增，

所以 $f(x) = 2x - \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1]$ 上单调递增。

当 $x=1$ 时取得最大值 $f(1) = 1$ ，无最小值，故值域为 $(-\infty, 1]$ 。

(2) 若函数 $y=f(x)$ 在定义域上是减函数，

则任取 $x_1, x_2 \in (0, 1]$ 且 $x_1 < x_2$ ，

都有 $f(x_1) > f(x_2)$ 成立，

即 $(x_1 - x_2)(2 + \frac{a}{x_1 x_2}) > 0$ 恒成立，

也就是 $(x_1 - x_2) \cdot \frac{2x_1 x_2 + a}{x_1 x_2} > 0$ ，

只需 $2x_1 x_2 + a < 0$ ，即 $a < -2x_1 x_2$ 成立。

由 $x_1, x_2 \in (0, 1]$ ，

故 $-2x_1 x_2 \in (-2, 0)$ ，

所以 $a \leq -2$ 。

故 a 的取值范围是 $(-\infty, -2]$ 。

20. 若二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 满足 $f(x+1) - f(x) = 2x$ ，且 $f(0) = 1$ 。

(1) 求 $f(x)$ 的解析式；

(2) 若在区间 $[-1, 1]$ 上，不等式 $f(x) > 2x + m$ 恒成立，求实数 m 的取值范围。

【考点】3R: 函数恒成立问题; 36: 函数解析式的求解及常用方法.

【分析】(1) 由二次函数可设 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), 由 $f(0) = 1$ 求得 c 的值, 由 $f(x+1) - f(x) = 2x$ 可得 a, b 的值, 即可得 $f(x)$ 的解析式;

(2) 欲使在区间 $[-1, 1]$ 上不等式 $f(x) > 2x + m$ 恒成立, 只须 $x^2 - 3x + 1 - m > 0$ 在区间 $[-1, 1]$ 上恒成立, 也就是要 $x^2 - 3x + 1 - m$ 的最小值大于 0, 即可得 m 的取值范围.

【解答】解: (1) 由题意可知, $f(0) = 1$, 解得, $c = 1$,

由 $f(x+1) - f(x) = 2x$ 可知, $[a(x+1)^2 + b(x+1) + 1] - (ax^2 + bx + 1) = 2x$, 化简得, $2ax + a + b = 2x$,

$$\therefore \begin{cases} 2a = 2 \\ a + b = 0 \end{cases},$$

$$\therefore a = 1, b = -1.$$

$$\therefore f(x) = x^2 - x + 1;$$

(2) 不等式 $f(x) > 2x + m$, 可化简为 $x^2 - x + 1 > 2x + m$,

即 $x^2 - 3x + 1 - m > 0$ 在区间 $[-1, 1]$ 上恒成立,

设 $g(x) = x^2 - 3x + 1 - m$, 则其对称轴为 $x = \frac{3}{2}$,

$\therefore g(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上是单调递减函数.

因此只需 $g(x)$ 的最小值大于零即可,

$$g(x)_{\min} = g(1),$$

$$\therefore g(1) > 0,$$

即 $1 - 3 + 1 - m > 0$, 解得, $m < -1$,

$\therefore$ 实数 m 的取值范围是 $m < -1$.

21. 已知函数 $f(x)$ 在其定义域 $(0, +\infty)$, $f(2) = 1$, $f(xy) = f(x) + f(y)$, 当 $x > 1$ 时, $f(x) > 0$;

(1) 求 $f(8)$ 的值;

(2) 讨论函数 $f(x)$ 在其定义域 $(0, +\infty)$ 上的单调性;

(3) 解不等式 $f(x) + f(x-2) \leq 3$.

【考点】3P: 抽象函数及其应用.

【分析】(1) 题意知 $f(2 \times 2) = f(2) + f(2) = 2$, $f(2 \times 4) = f(2) + f(4) = 3$,

$$f[x(x-2)] < f(8),$$

(2) 利用函数单调性的定义即可证明 $f(x)$ 在定义域上是增函数;

(3) 由 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 且在其上为增函数, 将不等式进行转化即可解得答案.

【解答】解: (1) $\because f(xy) = f(x) + f(y), f(2) = 1,$

$$\therefore f(2 \times 2) = f(2) + f(2) = 2,$$

$$\therefore f(8) = f(2 \times 4) = f(2) + f(4) = 3,$$

$$(2) \text{ 当 } x=y=1 \text{ 时, } f(1) = f(1) + f(1),$$

$$\text{则 } f(1) = 0,$$

$f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数

设 $x_1 < x_2$, 则

$$\because f(x_1) < f(x_2), \therefore f(x_1) - f(x_2) < 0,$$

任取 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$,

$$\text{则 } \frac{x_2}{x_1} > 1, \text{ 则 } f\left(\frac{x_2}{x_1}\right) > 0,$$

$$\text{又 } f(x \cdot y) = f(x) + f(y),$$

$$\therefore f(x_1) + f\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = f(x_2),$$

$$\text{则 } f(x_2) - f(x_1) = f\left(\frac{x_2}{x_1}\right) > 0,$$

$$\therefore f(x_2) > f(x_1),$$

$\therefore f(x)$ 在定义域内是增函数.

$$(3) \text{ 由 } f(x) + f(x-2) \leq 3,$$

$$\therefore f(x(x-2)) \leq f(8)$$

$\because$ 函数 $f(x)$ 在其定义域 $(0, +\infty)$ 上是增函数,

$$\therefore \begin{cases} x > 0 \\ x-2 > 0 \\ x(x-2) \leq 8 \end{cases}$$

解得, $2 < x \leq 4$.

所以不等式 $f(x) + f(x-2) \leq 3$ 的解集为 $\{x | 2 < x \leq 4\}$.

22. 设函数 $f(x) = x^2 - 2tx + 2$, 其中 $t \in \mathbb{R}$.

(1) 若 $t=1$, 求函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 4]$ 上的取值范围;

(2) 若 $t=1$, 且对任意的 $x \in [a, a+2]$, 都有 $f(x) \leq 5$, 求实数 a 的取值范围.

(3) 若对任意的 $x_1, x_2 \in [0, 4]$, 都有 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq 8$, 求 t 的取值范围.

【考点】 3X: 二次函数在闭区间上的最值; 3W: 二次函数的性质.

【分析】 (1) 若 $t=1$, 则 $f(x) = (x-1)^2 + 1$, 根据二次函数在 $[0, 4]$ 上的单调性可求函数的值域

(2) 由题意可得函数在区间 $[a, a+2]$ 上, $[f(x)]_{\max} \leq 5$, 分别讨论对称轴 $x=t$ 与区间 $[a, a+2]$ 的位置关系, 进而判断函数在该区间上的单调性, 可求最大值, 进而可求 a 的范围

(3) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 4]$ 上的最大值为 M , 最小值为 m , 对任意的 $x_1, x_2 \in [0, 4]$, 都有 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq 8$ 等价于 $M - m \leq 8$, 结合二次函数的性质可求

【解答】 解: 因为 $f(x) = x^2 - 2tx + 2 = (x-t)^2 + 2 - t^2$,

所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, t]$ 上单调减, 在区间 $[t, +\infty)$ 上单调增, 且对任意的 $x \in \mathbb{R}$, 都有 $f(t+x) = f(t-x)$,

(1) 若 $t=1$, 则 $f(x) = (x-1)^2 + 1$.

① 当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x)$ 单调减, 从而最大值 $f(0) = 2$, 最小值 $f(1) = 1$.

所以 $f(x)$ 的取值范围为 $[1, 2]$;

② 当 $x \in [1, 4]$ 时, $f(x)$ 单调增, 从而最大值 $f(4) = 10$, 最小值 $f(1) = 1$.

所以 $f(x)$ 的取值范围为 $[1, 10]$;

所以 $f(x)$ 在区间 $[0, 4]$ 上的取值范围为 $[1, 10]$

(2) “对任意的 $x \in [a, a+2]$, 都有 $f(x) \leq 5$ ”等价于“在区间 $[a, a+2]$ 上, $[f(x)]_{\max} \leq 5$ ”.

① 若 $t=1$, 则 $f(x) = (x-1)^2 + 1$,

所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 1]$ 上单调减, 在区间 $[1, +\infty)$ 上单调增.

② 当 $1 \leq a+1$, 即 $a \geq 0$ 时,

由 $[f(x)]_{\max} = f(a+2) = (a+1)^2 + 1 \leq 5$, 得 $-3 \leq a \leq 1$,

从而 $0 \leq a \leq 1$.

③当 $1 > a+1$, 即 $a < 0$ 时, 由 $[f(x)]_{\max} = f(a) = (a-1)^2 + 1 \leq 5$, 得 $-1 \leq a \leq 3$,
从而 $-1 \leq a < 0$.

综上, a 的取值范围为区间 $[-1, 1]$

(3) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 4]$ 上的最大值为 M , 最小值为 m ,

所以“对任意的 $x_1, x_2 \in [0, 4]$, 都有 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq 8$ ”等价于“ $M - m \leq 8$ ”.

①当 $t \leq 0$ 时, $M = f(4) = 18 - 8t$, $m = f(0) = 2$.

由 $M - m = 18 - 8t - 2 = 16 - 8t \leq 8$, 得 $t \geq 1$.

从而 $t \in \emptyset$.

②当 $0 < t \leq 2$ 时, $M = f(4) = 18 - 8t$, $m = f(t) = 2 - t^2$.

由 $M - m = 18 - 8t - (2 - t^2) = t^2 - 8t + 16 = (t - 4)^2 \leq 8$, 得

$$4 - 2\sqrt{2} \leq t \leq 4 + 2\sqrt{2}.$$

从而 $4 - 2\sqrt{2} \leq t \leq 2$.

③当 $2 < t \leq 4$ 时, $M = f(0) = 2$, $m = f(t) = 2 - t^2$.

由 $M - m = 2 - (2 - t^2) = t^2 \leq 8$, 得 $-2\sqrt{2} \leq t \leq 2\sqrt{2}$.

从而 $2 < t \leq 2\sqrt{2}$.

④当 $t > 4$ 时, $M = f(0) = 2$, $m = f(4) = 18 - 8t$.

由 $M - m = 2 - (18 - 8t) = 8t - 16 \leq 8$, 得 $t \leq 3$.

从而 $t \in \emptyset$.

综上, t 的取值范围为区间 $[4 - 2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$

2017 年 7 月 7 日