2008-2009 学年度下学期期末考试

高二理科数学试卷答案

一、选择题　　BDDADB　CDDA AC

二、填空题　13．135；14．5，10 ；15． 2^n；16． $\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$ 。

三、解答题

17．解：（Ⅰ）设 $z=a+bi(a,b\in R)$，

$\because 4z+2\bar{z}=3\sqrt{3}+i$，　　$\therefore 6a+2bi=3\sqrt{3}+i$，

由两个复数相等的定义，得：

$$\begin{cases}6a=3\sqrt{3}\\2b=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\sqrt{3}/2\\b=1/2\end{cases}$$

所以 $z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ 。…………………………………………6 分

（Ⅱ）$|z-\omega|=|(\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin\theta)+i(\frac{1}{2}+\cos\theta)|$

$=\sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin\theta)^2+(\frac{1}{2}+\cos\theta)^2}=\sqrt{2-(\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta)}$………8 分

$=\sqrt{2-2\sin(\theta-\frac{\pi}{6})}$ ………………………………………10 分

$\because -1\le\sin(\theta-\frac{\pi}{6})\le 1$，$|z-\omega|\in[0,2]$ 。………………12 分

18．解：（Ⅰ）以红、蓝两个骰子的点数作为点的坐标（x,y），

则基本事件的总数共有 6×6=36 个，

其中点数相同的事件有（1，1）（2，2），（3，3）（4，4），（5，5），（6，6）等 6 个。……………………………… ……4 分

由古典概型及对立事件的定义，可知

所求概率为 $P=1-6/36=5/6$ ------------------------------------6 分

（Ⅱ）设 A=“点数不同”，B=“至少一个是 6 点”

$P(A)=\frac{30}{36},P(B)=\frac{11}{36}$，$P(A\cap B)=\frac{10}{36}$ ………………………………8 分

则 由条件概率可知：$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{10/36}{30/36}=\frac{1}{3}$…………11 分

故已知点数不同，至少有一个是 6 点的概率为 1/3。 -------------12 分

19．解：（Ⅰ）$\because 2C_m^1+C_n^1=11\therefore 2m+n=11$

$$\therefore C_m^2\cdot 2^2+C_n^2=2m(m-1)+\frac{1}{2}n(n-1)=4m^2-23m+55$$

$$=4(m-\frac{23}{8})^2+\frac{351}{16}$$

∴ 当 m=3, n=5 时有最小值 22。 ……………………………6 分

（Ⅱ）故 $f(x)=(1+2x)^3+(1+x)^5$

设 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$ ………9 分

当 x=1 时，$a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=59$ ①

当 x=−1 时，$a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5=-1$ ②

①+②得：$a_0+a_2+a_4=29$

即 x 的偶数次幂项的系数之和为 29。 ……………………………12 分

20.（Ⅰ）甲取红球、白球、黄球的概率分别为$\frac{x}{10}$，$\frac{y}{10}$，$\frac{z}{10}$；

乙取红球、白球、黄球的概率分别为$\frac{5}{10}$，$\frac{3}{10}$，$\frac{2}{10}$.

故甲胜的概率 $P=\frac{5x}{100}+\frac{3y}{100}+\frac{2z}{100}=\frac{1}{100}(5x+3y+2z)$. ………………4 分

（Ⅱ）$\xi=0,1,2,3$ 从而ξ 的分布列为：

ξ	0	1	2	3
P	$1-\frac{5x+3y+2z}{100}$	$\frac{5x}{100}$	$\frac{3y}{100}$	$\frac{2z}{100}$

由 $x+y+z=10$ 得 $E(\xi)=\frac{1}{100}(5x+6y+6z)=\frac{1}{100}(60-x)$. ………………8 分

由 $x,y,z\geqslant 1$，知 $1\leqslant x\leqslant 8$，

故 当 x=8，$y=z=1$时，$E(\xi)_{\min}=13/25$. ………………10 分

21.（Ⅰ）因为$A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}=n\cdot\frac{(n-1)!}{[(n-1)-(k-1)]!}=nA_{n-1}^{k-1}(2\le k\le n)$，……2 分

所以当 $n\ge 2$ 时，$\frac{a_n}{n}=\frac{1}{n}(A_n^1+A_n^2+\cdots+A_n^n)=\frac{1}{n}[n+(nA_{n-1}^1+\cdots+nA_{n-1}^{n-1})]$

$=1+(A_{n-1}^1+\cdots+A_{n-1}^{n-1})=1+a_{n-1}$.

所以 $a_{n-1}+1=\frac{a_n}{n}$. ……………………………4 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $\dfrac{a_{n-1}+1}{a_{n-1}}=\dfrac{a_n}{na_{n-1}}$，即 $1+\dfrac{1}{a_{n-1}}=\dfrac{a_n}{na_{n-1}}$，…………………5 分

所以 $(1+\dfrac{1}{a_1})\cdot(1+\dfrac{1}{a_2})\cdot(1+\dfrac{1}{a_3})\cdots\cdots(1+\dfrac{1}{a_n})=\dfrac{a_2}{2a_1}\cdot\dfrac{a_3}{3a_2}\cdot\dfrac{a_4}{4a_3}\cdots\dfrac{a_{n+1}}{(n+1)a_n}$

$=\dfrac{a_{n+1}}{(n+1)!}=\dfrac{1}{(n+1)!}(\mathrm{A}_{n+1}^{1}+\mathrm{A}_{n+1}^{2}+\cdots+\mathrm{A}_{n+1}^{n+1})$

$=\dfrac{1}{n!}+\dfrac{1}{(n-1)!}+\cdots+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{1!}+1$ ……………………………………8 分

$\le\dfrac{1}{n(n-1)}+\dfrac{1}{(n-1)(n-2)}+\cdots+\dfrac{1}{1\times 2}+2$ …………………………11 分

$=(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n})+(\dfrac{1}{n-1}+\dfrac{1}{n-2})+\cdots+(1-\dfrac{1}{2})+2$

$=3-\dfrac{1}{n}$. …………………12 分

（另法：可用数学归纳法来证明 $\dfrac{1}{n!}+\dfrac{1}{(n-1)!}+\cdots+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{1!}+1\le 3-\dfrac{1}{n}$，本步骤 4 分）

22.（图略）

法一（切割线定理）

过 AB 分别作 AH、BK 切小圆于 H、K，再分别连结 AO、HO、BO、KO，则 $\angle AHO=\angle BKO=90^0$，又因为 AO=BO,OH=OK,所以 △AHO≌△BKO,（……5 分）所以 AH=BK，$AH^2=BK^2$,由切割线定理可得：$AH^2=AX\cdot AY$，$BK^2=BP\cdot BQ$，所以 $AX\cdot AY=BP\cdot BQ$。…10 分

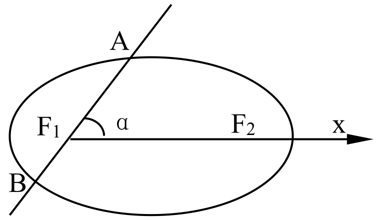
法二（割线定理）

连结 AO 并延长交小圆于 M 和 N,连结并延长 BO 交小圆于 G 和 D,显然 AN=BD,AM=BG(两圆的半径之和相等，两圆的半径之差相等）（……5 分）由割线定理可知：$AX\cdot AY=AM\cdot AN$，$BP\cdot BQ=BG\cdot BD$，所以 $AX\cdot AY=BP\cdot BQ$。…………10 分

法三:（相交弦定理）

过 XP 作直线 MN 分别交大圆于 MN，分别延长 AY 和 BQ 分别交大圆于 HG，由相交弦定理可得：$AX\cdot XH=MX\cdot XN$，$BP\cdot BQ=PM\cdot PN$，（……5 分）再过 O 作 OI⊥MN，I 为垂足，则有 MX=PN,XN=PM,AY=XH,BQ=PG 是显然成立的（等量之差与等量之和），所以 $AX\cdot AY=BP\cdot BQ$。 ……………10 分

23．解：以椭圆的左焦点为极点长轴所在直线为极轴建立极坐标系（如图）



这里:a=3,c= $2\sqrt{2}$, $\therefore b=1, p=\frac{a^2}{c}-c=\frac{\sqrt{2}}{4}, e=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, ………………2 分

所以椭圆的极坐标方程为：

$$\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}=\frac{1}{3-2\sqrt{2}\cos\theta}$$ ……………………… 4 分

设 A 点的极坐标为(ρ_1,α)，B 点的极坐标为$(\rho_2,\alpha+\pi)$，………… 5 分

$$|AB|=\rho_1+\rho_2=\frac{1}{3-2\sqrt{2}\cos\alpha}+\frac{1}{3-2\sqrt{2}\cos(\alpha+\pi)}=\frac{6}{9-8\cos^2\alpha},$$

由$|AB|=\frac{6}{9-8\cos^2\alpha}=2$得$,\cos^2\alpha=\frac{3}{4},\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$,…………………9分

又$0\le\alpha<\pi$，所以$\alpha=\frac{\pi}{6}$或$\alpha=\frac{5\pi}{6}$.……………………………………10分

解法二：由已知椭圆的方程为$\frac{x^2}{9}+y^2=1$，其左焦点为 $F(-2\sqrt{2},0)$，

直线 AB 的参数方程为：

$$\begin{cases}x=-2\sqrt{2}+t\cos\alpha\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$$(t为参数)， ……………… 4 分

将此参数方程代人椭圆方程并整理得：$(1+8\sin^2\alpha)t^2+4\sqrt{2}t\cos\alpha-1=0$，

设 A、B 对应的参数分别为t_1、t_2，则

$$|AB|=|t_1-t_2|=\frac{\sqrt{32\cos^2\alpha+4(1+8\sin^2\alpha)}}{1+8\sin^2\alpha}=\frac{6}{1+8\sin^2\alpha}=2$$………8分

$\therefore\sin^2\alpha=\frac{1}{4},\sin\alpha=\pm\frac{1}{2}(,\because 0\le\alpha<\pi,\therefore\alpha=\frac{\pi}{6}$或$\frac{5\pi}{6}$ …………………10分

23．证明：因为$x^2+y^2\ge 2xy\ge 0$ ……………………2 分

所以 $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)\ge xy(x+y)$ ……………………4 分

同理 $y^3+z^3\ge yz(y+z)$,

$z^3+x^3\ge zx(z+x)$

三式相加即可得

$$2(x^3+y^3+z^3)\ge xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)$$ ……………6 分

又因为$xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)=x^2(y+z)+y^2(x+z)+z^2(x+y)$ ……8 分

所以 $2(x^3+y^3+z^3)\ge x^2(y+z)+y^2(x+z)+z^2(x+y)$ ……………10 分