高一数学第三章章末检测(1)第 3 章　三角恒等变换(A)

(时间：120 分钟　满分：160 分)

一、填空题(本大题共 14 小题，每小题 5 分，共 70 分)

1．$(\cos\frac{\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12})(\cos\frac{\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12})=$________.

2.$\frac{\sqrt{3}\tan 15°+1}{\sqrt{3}-\tan 15°}$的值是________.

3．已知 $\sin x-\sin y=-\frac{2}{3}$，$\cos x-\cos y=\frac{2}{3}$，且 x，y 为锐角，则 $\sin(x+y)=$________.

4．设 $a=\sin 14°+\cos 14°$，$b=\sin 16°+\cos 16°$，$c=\frac{\sqrt{6}}{2}$，则 a、b、c 按从小到大的顺序排列为________.

5．已知 $\sin(45°+\alpha)=\frac{\sqrt{5}}{5}$，则 $\sin 2\alpha=$________.

6．若 $\sin x-\sin y=-\frac{1}{3}$，$\cos x-\cos y=\frac{1}{4}$，则 $\cos(x-y)$的值是________.

7．若函数 $f(x)=\sin(2x+\theta)+\sqrt{3}\cos(2x+\theta)$为奇函数，则θ的取值集合是________.

8．已知 $\tan 2\theta=-2\sqrt{2}$，$\pi<2\theta<2\pi$，则 $\tan\theta$的值为________.

9．函数 $y=2\sin x(\sin x+\cos x)$的最大值为______.

10．化简：$\frac{1+\sin 4\alpha-\cos 4\alpha}{1+\sin 4\alpha+\cos 4\alpha}=$________.

11．已知 $\sin\alpha=\cos 2\alpha$，$\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，则 $\tan\alpha=$______.

12．若$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=3$，$\tan(\alpha-\beta)=2$，则 $\tan(\beta-2\alpha)=$________.

13．函数 $y=\sin\frac{2x}{3}+\cos\left(\frac{2x}{3}+\frac{\pi}{6}\right)$的图象中相邻对称轴的距离是________.

14．已知 $\cos(\alpha-\beta)=\frac{3}{5}$，$\sin\beta=-\frac{5}{13}$，且$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\beta\in(-\frac{\pi}{2},0)$，则 $\sin\alpha=$________.

二、解答题(本大题共 6 小题，共 90 分)

15．(14 分)已知 $\tan\alpha$，$\tan\beta$是方程 $6x^2-5x+1=0$ 的两根，且 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$.

求：$\tan(\alpha+\beta)$及$\alpha+\beta$的值．

16．(14 分)已知函数 $f(x)=2\cos 2x+\sin^2x-4\cos x$.

(1)求 $f(\frac{\pi}{3})$的值；

(2)求 f(x)的最大值和最小值．

17．(14 分)已知向量 $\boldsymbol{a}=(3\sin\alpha，\cos\alpha)$，$\boldsymbol{b}=(2\sin\alpha，5\sin\alpha-4\cos\alpha)$，$\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2}，2\pi\right)$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

(1)求 $\tan\alpha$的值；

(2)求 $\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$的值.

18．(16 分)已知函数 $f(x)=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\sqrt{3}\cos 2x$.

(1)求 $f(x)$的周期和单调递增区间；

(2)若关于 x 的方程 $f(x)-m=2$ 在 $x\in\left[\frac{\pi}{4}，\frac{\pi}{2}\right]$上有解，求实数 m 的取值范围.

19．(16 分)已知函数 $f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\cos^2x-1(x\in\mathbf{R})$.

(1)求函数 $f(x)$的最小正周期及在区间$[0，\frac{\pi}{2}]$上的最大值和最小值；

(2)若 $f(x_0)=\frac{6}{5}$，$x_0\in[\frac{\pi}{4}，\frac{\pi}{2}]$，求 $\cos 2x_0$ 的值.

20．(16 分)已知 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$，$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$，$\cos(\beta-\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{10}$.

(1)求 $\sin\alpha$的值；(2)求β的值．

第 3 章　三角恒等变换(A)

1.$\frac{\sqrt{3}}{2}$

解析　$(\cos\frac{\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12})(\cos\frac{\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12})$

$=\cos^2\frac{\pi}{12}-\sin^2\frac{\pi}{12}=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2．1

解析　$\because\frac{\sqrt{3}-\tan 15°}{\sqrt{3}\tan 15°+1}=\frac{\tan 60°-\tan 15°}{1+\tan 60°\tan 15°}$

$=\tan 45°=1$，

$\therefore\frac{\sqrt{3}\tan 15°+1}{\sqrt{3}-\tan 15°}=1$.

3．1

解析　$\because\sin x-\sin y=-\frac{2}{3}$，$\cos x-\cos y=\frac{2}{3}$，两式相加得：

$\sin x+\cos x=\sin y+\cos y$，

$\therefore\sin 2x=\sin 2y$，

又$\because$x，y 均为锐角且 $x\neq y$，

$\therefore 2x=\pi-2y$，$x+y=\frac{\pi}{2}$,

$\therefore\sin(x+y)=1$.

4．a<c<b

解析　$a=\sqrt{2}\sin 59°<\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，a<c.

$b=\sqrt{2}\sin 61°>\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，b>c.

从而 a<c<b.

5．$-\frac{3}{5}$

解析　$sin(\alpha+45°)=(sin\ \alpha+cos\ \alpha)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$,

$\therefore sin\ \alpha+cos\ \alpha=\frac{\sqrt{10}}{5}$.

两端平方，$\therefore 1+sin\ 2\alpha=\frac{2}{5}$,

$\therefore sin\ 2\alpha=-\frac{3}{5}$.

6.$\frac{263}{288}$

解析　由$\begin{cases}sin\ x-sin\ y=-\frac{1}{3} & ①\\ cos\ x-cos\ y=\frac{1}{4} & ②\end{cases}$

①^2+②^{2}得

$2-2(sin\ xsin\ y+cos\ xcos\ y)=\frac{25}{144}$.

$\therefore cos(x-y)=\frac{263}{288}$.

7.$\left\{\theta|\theta=k\pi-\frac{\pi}{3},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$

解析　$f(x)=\sin(2x+\theta)+\sqrt{3}\cos(2x+\theta)$

$=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}+\theta\right)$.

$f(0)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)=0$.

$\therefore\frac{\pi}{3}+\theta=k\pi$，即$\theta=k\pi-\frac{\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$.

8．$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

解析　$\because\pi<2\theta<2\pi$,

$\therefore\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$,

则 $\tan\theta<0$，$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=-2\sqrt{2}$,

化简得 $\sqrt{2}\tan^2\theta-\tan\theta-\sqrt{2}=0$,

解得 $\tan\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$或 $\tan\theta=\sqrt{2}$(舍去),

$\therefore\tan\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

9.$\sqrt{2}+1$

解析　$y=2\sin^2x+2\sin x\cos x$

$=1-\cos 2x+\sin 2x$

$=\sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})+1$,

$\therefore y_{\max}=\sqrt{2}+1$.

10．$\tan 2\alpha$

解析　原式$=\frac{2\sin^2 2\alpha+2\sin 2\alpha\cos 2\alpha}{2\cos^2 2\alpha+2\sin 2\alpha\cos 2\alpha}$

$=\dfrac{2\sin 2\alpha(\sin 2\alpha+\cos 2\alpha)}{2\cos 2\alpha(\cos 2\alpha+\sin 2\alpha)}=\tan 2\alpha.$

11．$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

解析　$\because \sin\alpha=\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$

$\therefore 2\sin^2\alpha+\sin\alpha-1=0$，

$\therefore \sin\alpha=\dfrac{1}{2}$或$-1$.

$\because \dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，$\therefore \sin\alpha=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore \alpha=\dfrac{5}{6}\pi$，$\therefore \tan\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

12.$\dfrac{4}{3}$

解析　$\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\dfrac{\tan\alpha+1}{\tan\alpha-1}=3$，故 $\tan\alpha=2$.

又 $\tan(\alpha-\beta)=2$，故 $\tan(\beta-\alpha)=-2$，

$\therefore \tan(\beta-2\alpha)=\tan[(\beta-\alpha)-\alpha]$

$=\dfrac{\tan(\beta-\alpha)-\tan\alpha}{1+\tan(\beta-\alpha)\tan\alpha}=\dfrac{4}{3}.$

13.$\dfrac{3\pi}{2}$

解析　$y=\sin\dfrac{2x}{3}+\cos\dfrac{2x}{3}\cos\dfrac{\pi}{6}-\sin\dfrac{2x}{3}\cdot\sin\dfrac{\pi}{6}=\cos\dfrac{2x}{3}\cos\dfrac{\pi}{6}+\sin\dfrac{2x}{3}\sin\dfrac{\pi}{6}=\cos\left(\dfrac{2x}{3}-\dfrac{\pi}{6}\right)$，$T=\dfrac{2\pi}{\frac{2}{3}}=3\pi$，相邻两对称轴的距离是周期的一半.

14.$\dfrac{33}{65}$

解析　由于$\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，$\beta\in(-\dfrac{\pi}{2},0)$，

因此$\alpha-\beta\in(0,\pi)$.

又由于 $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{3}{5}>0$，因此$\alpha-\beta\in(0,\dfrac{\pi}{2})$.

$\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{4}{5}$且 $\cos\beta=\dfrac{12}{13}$，

$\sin\alpha=\sin(\alpha-\beta+\beta)$

$=\sin(\alpha-\beta)\cos\beta+\cos(\alpha-\beta)\sin\beta$

$=\dfrac{4}{5}\times\dfrac{12}{13}+\dfrac{3}{5}\times(-\dfrac{5}{13})=\dfrac{33}{65}.$

15．解　$\because \tan\alpha$、$\tan\beta$为方程 $6x^2-5x+1=0$ 的两根，

$\therefore \tan\alpha+\tan\beta=\dfrac{5}{6}$，$\tan\alpha\tan\beta=\dfrac{1}{6}$，

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{\frac{5}{6}}{1-\frac{1}{6}}=1.$

$\because 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$\pi<\beta<\dfrac{3\pi}{2}$，

$\therefore \pi<\alpha+\beta<2\pi$，$\therefore \alpha+\beta=\dfrac{5\pi}{4}$.

16．解　(1)$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\cos\frac{2\pi}{3}+\sin^2\frac{\pi}{3}-4\cos\frac{\pi}{3}$

$=-1+\frac{3}{4}-2=-\frac{9}{4}$.

(2)$f(x)=2(2\cos^2x-1)+(1-\cos^2x)-4\cos x$

$=3\cos^2x-4\cos x-1=3\left(\cos x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{7}{3}$，$x\in\mathbf{R}$.

因为 $\cos x\in[-1,1]$，

所以，当 $\cos x=-1$ 时，$f(x)$取得最大值 6；

当 $\cos x=\frac{2}{3}$时，$f(x)$取得最小值$-\frac{7}{3}$.

17．解　(1)$\because \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，$\therefore \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

而 $\boldsymbol{a}=(3\sin\alpha，\cos\alpha)$，$\boldsymbol{b}=(2\sin\alpha，5\sin\alpha-4\cos\alpha)$，

故 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=6\sin^2\alpha+5\sin\alpha\cos\alpha-4\cos^2\alpha=0$.

由于 $\cos\alpha\neq0$，$\therefore 6\tan^2\alpha+5\tan\alpha-4=0$.

解之，得 $\tan\alpha=-\frac{4}{3}$，或 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$.

$\because \alpha\in\left(\frac{3\pi}{2}，2\pi\right)$，$\tan\alpha<0$，故 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$(舍去).

$\therefore \tan\alpha=-\frac{4}{3}$.

(2)$\because \alpha\in\left(\frac{3\pi}{2}，2\pi\right)$，$\therefore \frac{\alpha}{2}\in\left(\frac{3\pi}{4}，\pi\right)$.

由 $\tan\alpha=-\frac{4}{3}$，求得 $\tan\frac{\alpha}{2}=-\frac{1}{2}$或 $\tan\frac{\alpha}{2}=2$(舍去).

$\therefore \sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\pi}{3}$

$=-\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=-\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{15}}{10}$.

18．解　(1)$f(x)=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\sqrt{3}\cos 2x$

$=1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)-\sqrt{3}\cos 2x$

$=1+\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x$

$=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+1$，

周期 $T=\pi$；$2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，

解得 $f(x)$的单调递增区间为$\left[k\pi-\frac{\pi}{12}，k\pi+\frac{5\pi}{12}\right](k\in\mathbf{Z})$.

(2)$x\in\left[\frac{\pi}{4}，\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $2x-\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{6}，\frac{2\pi}{3}\right]$，

$\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\in\left[\frac{1}{2}，1\right]$，

所以 $f(x)$的值域为$[2,3]$.

而 $f(x)=m+2$，所以 $m+2\in[2,3]$，即 $m\in[0,1]$.

19．解　(1)由$f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\cos^2x-1$，得

$f(x)=\sqrt{3}(2\sin x\cos x)+(2\cos^2x-1)$

$=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$，

所以函数$f(x)$的最小正周期为π.

因为$f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$在区间$[0,\frac{\pi}{6}]$上为增函数，在区间$[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$上为减函数，又$f(0)=1$，$f(\frac{\pi}{6})=2$，$f(\frac{\pi}{2})=-1$，所以函数$f(x)$在区间$[0,\frac{\pi}{2}]$上的最大值为2，最小值为$-1$.

(2)由(1)可知$f(x_0)=2\sin(2x_0+\frac{\pi}{6})$.

因为$f(x_0)=\frac{6}{5}$，所以$\sin(2x_0+\frac{\pi}{6})=\frac{3}{5}$.

由$x_0\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$，得$2x_0+\frac{\pi}{6}\in[\frac{2\pi}{3},\frac{7\pi}{6}]$，

从而$\cos(2x_0+\frac{\pi}{6})=-\sqrt{1-\sin^2(2x_0+\frac{\pi}{6})}=-\frac{4}{5}$.

所以$\cos 2x_0=\cos[(2x_0+\frac{\pi}{6})-\frac{\pi}{6}]$

$=\cos(2x_0+\frac{\pi}{6})\cos\frac{\pi}{6}+\sin(2x_0+\frac{\pi}{6})\sin\frac{\pi}{6}=\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$.

20．解　(1)$\tan\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{4}{3}$，

所以$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{4}{3}$.又因为$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，

解得$\sin\alpha=\frac{4}{5}$.

(2)因为$0<\alpha<\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$，所以$0<\beta-\alpha<\pi$.

因为$\cos(\beta-\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{10}$，所以$\sin(\beta-\alpha)=\frac{7\sqrt{2}}{10}$.

所以$\sin\beta=\sin[(\beta-\alpha)+\alpha]$

$=\sin(\beta-\alpha)\cos\alpha+\cos(\beta-\alpha)\sin\alpha$

$=\frac{7\sqrt{2}}{10}\times\frac{3}{5}+\frac{\sqrt{2}}{10}\times\frac{4}{5}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

因为$\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，

所以$\beta=\frac{3\pi}{4}$.