

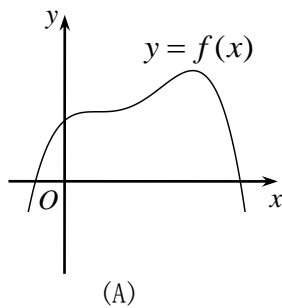
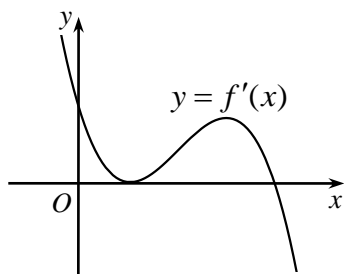
数学试卷 高二文科

考试时间:120 分钟

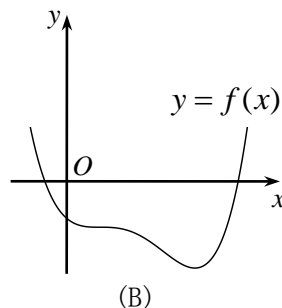
试题满分:150 分

一、选择题(4 个选项中只有 1 个选项正确, 每题 5 分, 共 12 题, 满分 60 分)

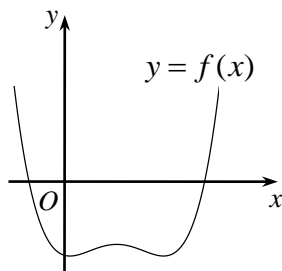
- 命题“所有被 5 整除的整数都是奇数”的否定是()
 (A) 所有被 5 整除的整数都不是奇数 (B) 所有奇数都不能被 5 整除
 (C) 存在一个被 5 整除的整数不是奇数 (D) 存在一个奇数, 不能被 5 整除
- 函数 $y = x \ln x$ 的单调递减区间是()
 (A) $(e^{-1}, +\infty)$ (B) $(-\infty, e^{-1})$ (C) $(0, e^{-1})$ (D) $(e, +\infty)$
- 如果命题“若 p 则 q ”的逆命题是真命题, 那么下列命题一定为真命题的是()
 (A) 若 p 则 q (B) 若 $\neg p$ 则 $\neg q$ (C) 若 $\neg q$ 则 $\neg p$ (D) 以上都不对
- " $b > 0$ " 是“关于 x 的方程 $|x| = ax + b$ 有两个不同实根”的()
 (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件 (C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件
- 已知函数 $y = f'(x)$ 的图象如下面左图所示, 则函数 $y = f(x)$ 的图象可能是右面四个图象中的()



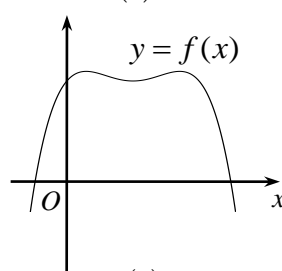
(A)



(B)



(C)



(D)

- 已知命题 p : 椭圆的离心率 e 越大、椭圆越接近圆; q : 双曲线的离心率 e 越大、双曲线的开口越狭窄. 则下列命题是真命题的是()

- (A) $p \vee q$ (B) $p \wedge q$ (C) $p \vee (-q)$ (D) $p \wedge (-q)$

7. 对任意实数 m ，过函数 $f(x) = x^2 + mx + 1$ 图象上的点 $(2, f(2))$ 的切线恒过一定点 P ，则点 P 的坐标为()

- (A) $(0, 3)$ (B) $(0, -3)$ (C) $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ (D) $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$

8. 若抛物线 $y^2 = 2x$ 的焦点是 F ，准线是 l ，点 $M(2, m)$ 是抛物线上一点且在第一象限，则经过点 F, M 且与 l 相切的圆的个数为()

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4

9. 函数 $f(x) = \frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}ax^2 - 2ax + 2a + 1$ 的图象经过四个象限，则实数 a 的取值范围是()

- (A) $-\frac{6}{5} < a < \frac{3}{16}$ (B) $-\frac{8}{5} < a < -\frac{3}{16}$ (C) $-\frac{8}{5} < a < -\frac{1}{16}$ (D) $-\frac{6}{5} < a < -\frac{3}{16}$

10. 已知两点 $M(-5, 0), N(5, 0)$ ，若直线上存在点 P ，使 $|PM| - |PN| = 6$ ，则称该直线为“和谐直线”，给出下列直线：① $y = x - 1$ ；② $y = 2$ ；③ $y = \frac{5}{3}x$ ；④ $y = 2x + 1$ 。其中为“和谐直线”的是()

- (A) ①② (B) ③④ (C) ①③ (D) ②

11. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 F ，过 F 做双曲线 C 的一条渐近线的垂线，垂足为 N ，若 $|FN| = a$ ，则双曲线 C 的离心率为()

- (A) 1 (B) 2 (C) $\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{3}$

12. 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y^2 = 2x$ 的焦点为 F 。设 M 是抛物线上的动点，则 $\frac{|MO|}{|MF|}$ 的最大值为()

- (A) 1 (B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

二、填空题(每题 5 分, 共 4 题, 满分 20 分)

13. $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$, 存在 $x \in [-1, 2]$, 使 $f(x) < m$ 成立, 实数 m 的取值范围为_____

14. 过点 $M(3, -)$ 且被点 M 平分的双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的弦所在直线方程为_____.

15. 关于 x 的方程 $ax = \ln x$ 有且仅有一个解, 则实数 a 的取值范围是_____.

16. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$, 若椭圆上存在一点 P (非顶点) 使 $\frac{\sin \angle PF_1 F_2}{\sin \angle PF_2 F_1} = \frac{\sin \angle PF_1 F_2 + \sin \angle PF_2 F_1}{\sin \angle F_1 P F_2}$, 则该椭圆的离心率的取值范围是_____.

三、解答题(共 6 题, 17 题满分 10 分, 18-22 题每题 12 分, 满分 70 分)

17. 已知命题 A “ $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + (a-1)x + 1 < 0$ ”.

(I) 写出命题 A 的否定; (II) 若命题 A 是假命题, 求出实数 a 的取值范围.

18. 某市旅游部门开发一种旅游纪念品, 每件产品的成本是 15 元, 销售价是 20 元, 月平均销售 a 件. 通过改进工艺, 产品的成本不变, 质量和技术含金量提高, 市场分析的结果表明, 如果产品的销售价提高的百分率为 x ($0 < x < 1$), 那么月平均销售量减少的百分率为 x^2 . 记改进工艺后, 旅游部门销售该纪念品的月平均利润是 y (元).

(I) 写出 y 与 x 的函数关系式;

(II) 改进工艺后, 确定该纪念品的售价, 使旅游部门销售该纪念品的月平均利润最大.

19. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 过坐标原点 O 的直线 l 交椭圆于 A 、 B 两点, C 是

椭圆上的一点, 且满足 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}$.

(I) 求证: $\frac{1}{|\overrightarrow{OA}|^2} + \frac{1}{|\overrightarrow{OC}|^2}$ 是定值; (II) 求 ΔABC 面积的最小值.

20. 已知 F_1, F_2 分别是椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左、右焦点, 曲线 C 是以坐标原点为顶点, 以 F_2

为焦点的抛物线, 自点 F_1 引直线 l 交曲线 C 于 P, Q 两个不同的点, 点 P 关于 x 轴的对称点记为 M , 设 $\overrightarrow{F_1P} = \lambda \overrightarrow{F_1Q}$. (I) 写出曲线 C 的方程; (II) 证明: $\overrightarrow{F_2M} = -\lambda \overrightarrow{F_2Q}$.

21. 已知函数 $f(x) = a \ln x + \frac{1}{x}$. (I) 当 $a > 0$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间和极值;

(II) 当 $a > 0$ 时, 若 $\forall x > 0$, 均有 $ax(2 - \ln x) \leq 1$, 求实数 a 的取值范围.

22. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 2, 过点 $P(0, m) (m > 0)$ 斜率为

1 的直线 l 交双曲线 C 于 A, B 两点, 且 $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 3$. ① 求双曲线方程;

② 设 Q 为双曲线 C 右支上动点, F 为双曲线 C 的右焦点, 在 x 轴负半轴上是否存在定点 M , 使得 $\angle QFM = 2\angle QMF$? 若存在, 求出点 M 的坐标; 若不存在, 请说明理由.