# 2016-2017学年度上学期高二年级期末考试

# 数学

考试时间：120分钟；总分：150分

## 第I卷（选择题）

### 一、选择题

1．已知点$P_1$（3，－5），$P_2$（－1，－2），在直线$P_1P_2$上有一点P，且$|P_1P|=15$，则P点坐标为（　）

A.（－9，－4）

B.（－14，15）

C.（－9，4）或（15，－14）

D.（－9，4）或（－14，15）

2．已知圆$C:(x-2)^2+(y+1)^2=3$，从点$P(-1,-3)$发出的光线，经$x$轴反射后恰好经过圆心$C$，则入射光线的斜率为（　）

A. $-\frac{4}{3}$　B. $-\frac{2}{3}$　C. $\frac{4}{3}$　D. $\frac{2}{3}$

3．抛物线$y=x^2-2x-3$与坐标轴的交点在同一个圆上，则交点确定的圆的方程为（　）

A. $x^2+(y-1)^2=2$ B. $(x-1)^2+(y-1)^2=4$

C. $(x-1)^2+y^2=1$ D. $(x-1)^2+(y+1)^2=5$

4．一束光线自点P（1，1，1）发出，遇到平面xoy被反射，到达点Q（3，3，6）被吸收，那么光所走的路程是（　）

A. $\sqrt{37}$　B. $\sqrt{47}$　C. $\sqrt{33}$　D. $\sqrt{57}$

5．若$1+\sin x\cdot\sqrt{\sin^2 x}+\cos x\cdot\sqrt{\cos^2 x}=0$，则$x$不可能是(　)

A. 任何象限的角　B. 第一、二、三象限的角

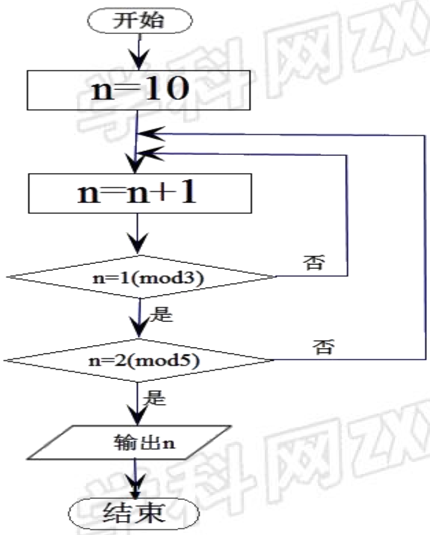
C. 第一、二、四象限的角　D. 第一、三、四象限的角

6．一段圆弧的长度等于其圆内接正三角形的边长,则其圆心角的弧度数为(　)

(A) $\frac{\pi}{3}$　(B) $\frac{2\pi}{3}$　(C) $\sqrt{3}$　(D) $\sqrt{2}$

7．若正整数$N$除以正整数$m$后的余数为$n$，则记为$N=n(\mathrm{mod}\,m)$，例如$10=2(\mathrm{mod}\,4)$．如图程序框

图的算法源于我国古代闻名中外的《中国剩余定理》. 执行该程序框图，则输出的$n$等于（　　）




A. 20　　　　B. 21　　　　C. 22　　　　D. 23

8．我国古代数学名著《数书九章》有“米谷粒分”题：粮仓开仓收粮，有人送来米 1524 石，验得米内夹谷，抽样取米一把，数得 254 粒内夹谷 28 粒，则这批米内夹谷约为（　　）

A．1365 石　　B．338 石　　C．168 石　　D．134 石

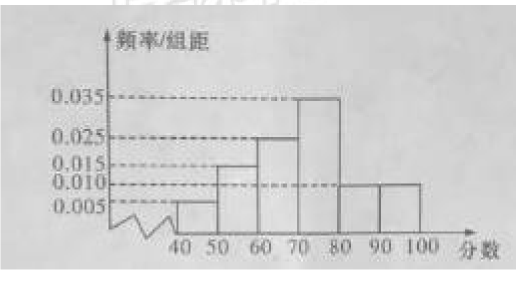
9．一个游戏转盘上有四种颜色：红、黄、蓝、黑，并且它们所占面积的比为 6∶2∶1∶4，则指针停在红色或蓝色的区域的概率为（　　）

A. $\frac{6}{13}$；　　B. $\frac{7}{13}$；　　C. $\frac{4}{13}$；　　D. $\frac{10}{13}$.

10．甲、乙、丙三人站在一起照相留念,乙正好站在甲丙之间的概率为（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{6}$

11．为了了解某校高三 400 名学生的数学学业水平测试成绩，制成样本频率分布直方图如图，规定不低于 60 分为及格，不低于 80 分为优秀，则及格率与优秀人数分别是（　　）




A. 60%，60　　　B. 60%，80　　　C. 80%，80　　　D. 80%，60

**12**．下课后教室里最后还剩下 **2** 位男同学和 **2** 位女同学，四位同学先后离开，则第二位走的是男同

学的概率是（   ）

（A）$\frac{1}{2}$ （B）$\frac{1}{3}$ （C）$\frac{1}{4}$ （D）$\frac{1}{5}$

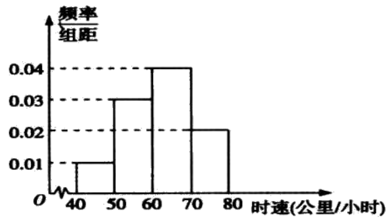
第 II 卷（非选择题）

二、填空题

13．若角$\alpha$的终边与 $240^0$ 角的终边相同，则$\frac{\alpha}{2}$的终边在第象限.

14．已知点 P，Q 为圆 C：$x^2+y^2=25$ 上的任意两点，且$|PQ|<6$，若 PQ 中点组成的区域为 M，在圆 C 内任取一点，则该点落在区域 M 上的概率为__________ .

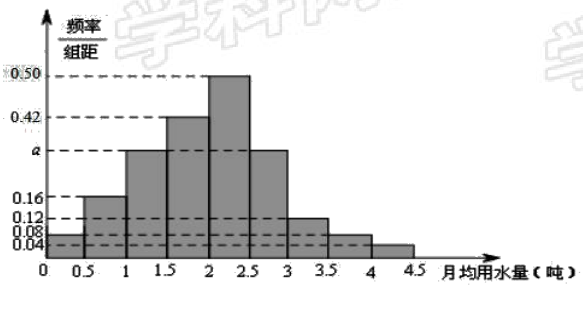
15．已知某一段公路限速 60 公里/小时，现抽取 200 辆通过这一段公路的汽车的时速，其频率分布直方图如图所示，则这 200 辆汽车中在该路段没有超速的有辆.




16．已知圆$O:x^2+y^2=1$，点$M(x_0,y_0)$是直线$x-y+2=0$上一点，若圆$O$上存在一点$N$，使得$\angle NMO=\frac{\pi}{6}$，则$x_0$的取值范围是.

三、解答题

17．某市为了制定合理的节水方案，对居民用水情况进行了调查，通过抽样，获得了某年 100 位居民每人的月均用水量（单位：吨），将数据按照[0,0.5)， [0.5,1)，……[4,4.5]分成 9 组，制成了如图所示的频率分布直方图.




（I）求直方图中的 a 值；

（II）设该市有 30 万居民，估计全市居民中月均用水量不低于 3 吨的人数．说明理由；

（Ⅲ）估计居民月均用水量的中位数.

18．已知空间直角坐标系 O﹣xyz 中的点 A（1，1，1），平面α过点 A 且与直线 OA 垂直，动点 P（x，y，z）是平面α内的任一点．

（1）求点 P 的坐标满足的条件；

（2）求平面α与坐标平面围成的几何体的体积．

19．已知曲线$C$：$x^2+y^2-2x-4y+m=0$，O 为坐标原点．

（1）当$m$为何值时，曲线$C$表示圆；

（2）若曲线$C$与直线$x+2y-3=0$交于$M$、$N$两点，且$OM\perp ON$，求$m$的值．

20．已知圆$M$的圆心为$M\left(-1,2\right)$，直线$y=x+4$被圆$M$截得的弦长为$\sqrt{2}$，点$P$在直线$l:y=x-1$上.

（1）求圆$M$的标准方程；

21．在空间直角坐标系中，已知 A（3，0，1）和 B（1，0，﹣3），试问

（1）在 y 轴上是否存在点 M，满足|MA|=|MB|？

（2）在 y 轴上是否存在点 M，使△MAB 为等边三角形？若存在，试求出点 M 坐标．

22．（本小题满分 12 分）$A,B$是单位圆$O$上的点，点$A$是单位圆与$x$轴正半轴的交点，点$B$在第二象限．记$\angle AOB=\theta$且$\sin\theta=\dfrac{4}{5}$.

（1）求$B$点坐标；

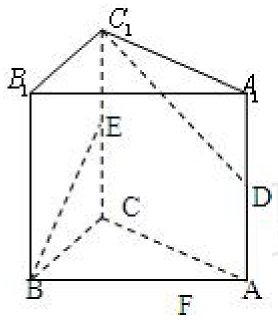
（2）求$\dfrac{\sin(\pi+\theta)+2\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)}{2\cos(\pi-\theta)}$的值.

23．（本题满分 8 分）已知锐角$\alpha,\beta$满足：$\sin\beta=3\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$，且$\alpha+\beta\neq\dfrac{\pi}{2}$

（Ⅰ）求证：$\tan(\alpha+\beta)=4\tan\alpha$；

（Ⅱ）求$\tan\beta$的最大值.

24．已知直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$D,E$分别为$AA_1,CC_1$的中点，$AC\perp BE$，点$F$在线段$AB$上，且$AB=4AF$．




（1）证：$BC \perp C_1D$；

（2）若 $M$ 为线段 $BE$ 上一点，试确定 $M$ 在线段 $BE$ 上的位置，使得 $C_1D//$ 平面 $B_1FM$ .

25．某中学高三数学奥林匹克竞赛集训队的一次数学测试成绩的茎叶图（图 1）和频率分布直方图（图 2）都受到不同程度的破坏，可见部分如图所示，据此解答如下问题.

| 茎 | 叶 |
|---|---|
| 5 | 6 8 |
| 6 | 2 3 3 5 6 8 9 |
| 7 | 1 2 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| 8 | |
| 9 | 5 8 |

图 1

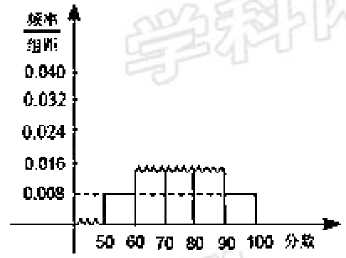



图 2

（1）求该集训队总人数及分数在[80，90）之间的频数；

（2）计算频率分布直方图中[80，90）的矩形的高；

（3）若要从分数在[80，100]之间的试卷中任取两份分析学生的答题情况，在抽取的试卷中，求至少有一份分数在[90，100]之间的概率.

参考答案

1．C2．C3．D4．D5．C6．A7．C8．C9．B10．B11．C**12**．A

**13**．二或四

14．$\frac{9}{25}$

15．80

16．$\left[-2,0\right]$

17．（Ⅰ）$a=0.30$；（Ⅱ）36000；（Ⅲ）2．06．

18．（1）x+y+z=3．（2）$\frac{9}{2}$

19．（1）$m<5$；（2）$m=\frac{12}{5}$．

（1）由题意可知：$D^2+E^2-4F=\left(-2\right)^2+\left(-4\right)^2-4m=20-4m>0$，解得：$m<5$；

（2）设$M\left(x_1,y_1\right),N\left(x_2,y_2\right)$，由题意$OM\perp ON$，得到$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=0$，即：$x_1x_2+y_1y_2=0$①，

联立直线方程和圆的方程：$\begin{cases}x^2+y^2-2x-4y+m=0\\x+2y-3=0\end{cases}$，消去$x$得到关于$y$的一元二次方程：

$5y^2-12y+3+m=0$，

∵直线与圆有两个交点，

∴$\Delta=b^2-4ac=12^2-4\times5\times m>0$，即$m+3<\frac{36}{5}$，即$m<\frac{21}{5}$，

又由（1）$m<5$，∴$m<\frac{21}{5}$，

由韦达定理：$y_1+y_2=\frac{12}{5},y_1y_2=\frac{3+\pi}{5}$②，

又点$M\left(x_1,y_1\right),N\left(x_2,y_2\right)$在直线$x+2y-3=0$上，

∴ $x_1=3-2y_1,x_2=3-2y_2$，代入①式得：$\left(3-2y_1\right)\left(3-2y_2\right)+y_1y_2=0$，即$5y_1y_2-6\left(y_1+y_2\right)+9=0$，

将②式代入上式得到：$3+m-\frac{36}{5}+9=0$，解得：$m=\frac{12}{5}<\frac{21}{5}$，则$m=\frac{12}{5}$．

20．（1）$\left(x+1\right)^2+\left(y-2\right)^2=1$（2）$(-1,-2)$或$\left(3,2\right)$

【解析】

（1）由直线与圆相交的弦长可求得圆的半径$r$，从而结合圆心得到圆的方程；（2）由点$P$在圆和直线上，可通过解方程组求得点$P$的坐标

试题解析：（1）$M(-1,2)$到直线$y=x+4$的距离为$d=\frac{|-1-2+4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，……………2 分

又直线$y=x+4$被圆$M$截得的弦长为$\sqrt{2}$，

所以圆$M$的半径为$r=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=1$，……………4 分

∴圆$M$的标准方程为$(x+1)^2+(y-2)^2=1$．……………6 分

（2）由$\overrightarrow{MP}=4\overrightarrow{QM}$，得$|\overrightarrow{MP}|=4|\overrightarrow{QM}|=4$，

所以点$P$在圆$(x+1)^2+(y-2)^2=16$上，……………8 分

又点$P$在直线$y=x-1$上，由$\begin{cases}(x+1)^2+(y-2)^2=16\\ y=x-1\end{cases}$……………10 分

解得$\begin{cases}x=-1\\ y=-2\end{cases}$或$\begin{cases}x=3\\ y=2\end{cases}$，

即点$P$的坐标为$(-1,-2)$或$(3,2)$．……………12 分

21.（1）y 轴上所有点都满足关系|MA|=|MB|；

（2）M 坐标为（0，$\sqrt{10}$，0），或（0，$-\sqrt{10}$，0）.

22.（1）$\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$；（2）$-\frac{5}{3}$.

【解析】

试题分析：（1）根据角$\theta$的终边与单位交点为（$\cos\theta,\sin\theta$），结合同角三角函数关系和$\sin\theta=\frac{4}{5}$，可得 B 点坐标；（2）由（1）中结论，结合诱导公式化简$\frac{\sin(\pi+\theta)+2\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)}{2\cos(\pi-\theta)}$，代入可得答案

试题解析：（1）∵点 A 是单位圆与 x 轴正半轴的交点，点 B 在第二象限.

设 B 点坐标为（x，y），

则 y=$\sin\theta=\frac{4}{5}$.

x=$-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\frac{3}{5}$

即 B 点坐标为：$\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$

（2）$\frac{\sin(\pi+\theta)+2\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)}{2\cos(\pi-\theta)}=\frac{-\sin\theta+2\cos\theta}{-2\cos\theta}=\frac{-\frac{4}{5}-\frac{6}{5}}{\frac{6}{5}}=-\frac{5}{3}$

23.（Ⅰ）详见解析；（Ⅱ）$\frac{3}{4}$

【解析】

试题分析：（Ⅰ）三角函数等式的证明一般从涉及到的角之间的联系入手，借助于两角和差的正余弦，二倍角等公式实现等价变形 （Ⅱ）求 $\tan\beta$ 的最大值时先将 $\tan\beta$ 用另一变量表示，即转化为函数式，进而求函数最大值

试题解析：（Ⅰ）由 $\sin\beta=\sin[(\alpha+\beta)-\alpha]=3\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$ 展开

得到：$\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha=4\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$

所以：$\tan(\alpha+\beta)=4\tan\alpha$

（Ⅱ）由：$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=4\tan\alpha$

化简得：$\tan\beta=\frac{3\tan\alpha}{4\tan^2\alpha+1}=\frac{3}{4\tan\alpha+\frac{1}{\tan\alpha}}\le\frac{3}{4}$

所以：$\tan\beta$ 的最大值为 $\frac{3}{4}$，当且仅当 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$ 时取到

24.（1）详见解析，（2）BE=4ME

【解析】

试题分析：（1）证明线线垂直，一般利用线面垂直性质与判定定理，经多次转化证明结论：本题先从直棱柱定义出发得线面垂直 $CC_1\perp$ 平面 $ABC$，转化为线线垂直后，用线面垂直判定定理转化为线面垂直 $AC\perp$ 面 $BCE$，再一次转化为线线垂直后，用线面垂直判定定理转化为线面垂直 $BC\perp$ 面 $ACC_1$，最后得到结论；（2）线面平行探索性问题，一般利用线面平行性质与判定定理进行探求与论证：先将直线 $C_1D$ 平移到 $EA$，这样要满足 $C_1D//$ 平面 $B_1FM$，只需满足 $EA$ 平行平面 $B_1FM$ 中一

条直线 $FM$ 即可，而 $AB=4AF$，因此 BE=4ME，找出点 M 位置后，再利用线面平行判定定理论证.

试题解析：解：

直三棱柱可知 $CC_1\perp$ 平面 $ABC$， $AC\subset$ 平面 ABC， 所以 $CC_1\perp AC$，

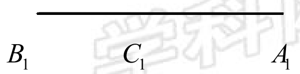
又因为 $AC\perp BE, CC_1\cap BE=E$， $CC_1\subset$ 平面 BCE， $BE\subset$ 平面 BCE， $AC\perp$ 面 $BCE$，

故 $AC\perp BC$，

又在直三棱柱中， $CC_1\perp BC, AC\cap CC_1=C$， $AC\subset$ 平面 $ACC_1$， $CC_1\subset$ 平面 $ACC_1$，

故 $BC\perp$ 面 $ACC_1, C_1D$ 在平面 $ACC_1$ 内，所以 $BC\perp C_1D$

（2）连结 AE，在 BE 上取点 M，使 BE=4ME，




连结 FM， $B_1M$，F $B_1$，在 $\Delta BEA$ 中，由 BE=4ME，AB=4AF

所以 MF//AE，

又在面 AA1C1C 中，∵ $C_1E=AD$ 且 $C_1E//AD$，∴C1D//AE，又 MF//AE，所以 $C_1D//$ MF，

$C_1D\not\subset$ 平面 $B_1FM$， $FM\subset$ 平面 $B_1FM$， $C_1D//$ 平面 $B_1FM$ .

25.（1）4（2）0.016（3） $\frac{3}{5}$

【解析】

（1）由茎叶图，根据频率=频数/样本容量的关系，求出全班人数以及分数在[80，90）之间的频数；（2）【解法一】根据平均数的定义计算即可，【解法二】利用频率分布直方图计算数据的平均数，再计算频率分布直方图中[80，90）间的矩形高=频率/组距；（3）用列举法计算在[80，100]之间的试卷中任取 2 份的基本事件数以及至少有一个在[90，100]之间的基本事件数，计算对应的概率

试题解析：(1)设集训队人数为 n，则 $n=\frac{2}{0.08}=25$，分数在[80，90）之间的频数为 4　--4 分

(2) [80，90）的矩形的高为： $\frac{4}{25\times 10}=0.016$　　　　　　　　------6 分

(3)[80，90）有 4 人，[80，90）有 2 人，记这 6 个人分别为 A,B,C,D,a,b,从 6 人中人抽取 2 人成绩的基本事件为 AB,AC,AD,Aa,Ab,BC,BD,Ba,Bb,CD,Ca,Cb,Da,Db,ab，共 15 个

其中至少有一人分数在[90，100]之间有：Aa,Ab，Ba,Bb，Ca,Cb,Da,Db,ab9 个

所以至少有一份分数在[90，100]之间的概率：P=$\frac{3}{5}$。 ---------12 分

（说明：第三问无过程或者太过简单，可酌情扣分）

考点：列举法计算基本事件数及事件发生的概率；频率分布直方图；茎叶图