

数学试卷 高二文科

考试时间：120 分钟

试题满分：150 分

第 I 卷（选择题共 60 分）

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 将 $(a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2)(c_1 + c_2 + c_3 + c_4)$ 展开后的项数是

- A. 24 B. 12 C. 11 D. 9

2. 算式 $(x-m)(x-m-1)(x-m-2)\cdots(x-9)$ （其中： $x, m \in N_+$ ，且 $x > m$ ）用排列数表示是

- A. A_{x-m}^{x-19} B. A_{x-m}^{9-m} C. A_{x-m}^{10-m} D. A_{x-m}^{8-m}

3. 组合数方程 $5C_n^5 + C_n^4 = C_n^3$ 的解是

- A. 6 B. 5 或 1 C. 5 D. 6 或 1

4. 由 $(\sqrt{3}x + \sqrt[3]{2})^{100}$ 展开所得的关于 x 的多项式中，系数为有理数的项共有

- A. 50 项 B. 17 项 C. 16 项 D. 15 项

5. 四本不同的书分配给三名同学，每个同学至少得一本，分配方法共有

- A. 81 种 B. 72 种 C. 36 种 D. 3 种

6. 抛掷骰子一次，事件 A 表示“出现的点数为奇数”，事件 B 表示“出现的点数不超过 3”，则 $P(A+B)$ 的值为

- A. 1 B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{1}{2}$

7. 在 $(x^2 + 3x + 2)^5$ 的展开式中，含 x 的项的系数为

- A. 160 B. 240 C. 360 D. 480

8. 某赛季足球比赛的计分规则是：胜一场，得 3 分；平一场，得 1 分；负一场，得 0 分，一球队打完 6 场，积 12 分。若不考虑顺序，该队胜、负、平的情况种数共有

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

9. 对含有 A, B, C, D, E, F 六个个体的总体进行简单随机抽样, 逐个抽取, 取出样本容量为 2 的样本, 则整个抽样过程中, 个体 A 于第二次被取出的概率是

- A. $\frac{1}{3}$
- B. $\frac{1}{5}$
- C. $\frac{5}{36}$
- D. $\frac{1}{6}$

10. 从圆周上的 8 个等分点中任取三个, 构成锐角三角形的概率是

- A. $\frac{4}{7}$ B. $\frac{3}{7}$
C. $\frac{2}{7}$ D. $\frac{1}{7}$

11. 马戏团一只小狗用 13 个字母: 3 个 A, 2 个 I, 2 个 M, 2 个 T, 其它 C、E、H、N 各一个做组字游戏, 若还未经训练, 则恰好组成“MATHEMATICIAN”一词的概率为

- A. $\frac{24}{8!}$ B. $\frac{48}{8!}$ C. $\frac{24}{13!}$ D. $\frac{48}{13!}$

12. 对概率均不为 0 的两事件 A, B 有下列说法:

- ① 若 A, B 是相互独立事件, 则 $A, \bar{B}$ 一定是相互独立事件
- ② 若 A, B 是互斥事件, 则 $A, \bar{B}$ 一定不是互斥事件
- ③ 若 A, B 不是互斥事件, 则 A, B 一定是相互独立事件
- ④ 若 A, B 是互斥事件, 则 A, B 一定是对立事件
- ⑤ 若 A, B 是互斥事件, 则 $\bar{A} + \bar{B}$ 一定是必然事件

其中，正确的有

- A. 1 个
B. 2 个
C. 3 个
D. 4 个

第二卷（非选择题共 90 分）

二、填空题：本大题共四小题，每小题 4 分，共 16 分。

13. 以正四棱柱的顶点为顶点的四棱锥的个数为_____。
14. A, B, C, D, E 五个人排成一排照相，要求 A, B 彼此不相邻，且 D, E 相邻的排法种数是_____。
15. 某种大炮击中目标的概率为 0.3，如果要使击中目标的概率大于 0.95，则至少应该准备大炮的门数是_____。（参考数据： $\lg 5 = 0.6990, \lg 7 = 0.8451$ ）
16. 若 $n \in N_+$ ，且 n 为奇数，则计算 $98^n + C_n^1 \cdot 98^{n-1} + C_n^2 \cdot 98^{n-2} + \cdots + C_n^{n-1} \cdot 98 - 1$ 所得结果的最后两位数是_____。

三、解答题：本大题共 6 小题，共 74 分。解答应写出文字说明或演算步骤。

17. （本小题满分 12 分）

解不等式： $A_8^x < 6 \cdot A_8^{x-2}$ 。

18. （本小题满分 12 分）

生命表描述了某人口群体死亡规律的概率分布。生命表的编制和计算是寿险精算的必修内容之一，是人寿保险业务的数理基础之一，是计算人身保险的保险费、责任准备金、退保金的主要依据。现从某地区生命表得到此地区 1 个投保人能活到 75 岁的概率为 0.60 的信息，试问：

- （1） 3 个投保人都能活到 75 岁的概率；
- （2） 3 个投保人中只有 1 人能活到 75 岁有概率；
- （3） 3 个投保人中至少有 1 人能活到 75 岁的概率。

19. （本小题满分 12 分）

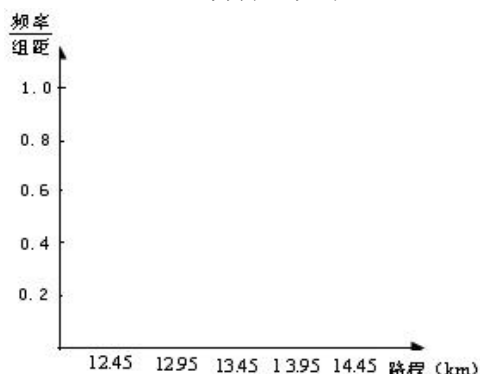
已知二项式 $(1+px)^n$ （ p 为大于 0 的常数）展开式中各项的二项式系数之和为 1024，按 x 的升幂排列的前三项的系数之和为 201。

- （1） 求常数 n 及 p 的值；
- （2） 求该二项式的展开式中所有 x 的奇数次方项的系数之和；
- （3） 求该展开式中系数最大的项。

20. (本小题满分 12 分)

有同一型号的汽车 100 辆, 为了了解这种汽车每耗油 1L 所行路程的情况, 现从中随机抽出 10 辆在同一条件下进行耗油 1L 所行路程试验, 得到如下样本数据 (单位: km): 13.7, 12.7, 14.4, 13.8, 13.3, 12.5, 13.5, 13.6, 13.1, 13.4, 并分组如下:

分组	频数	频率
[12.45, 12.95)		
[12.95, 13.45)		
[13.45, 13.95)		
[13.95, 14.45)		
合计	10	1.0



- (1) 完成上面频率分布表;
- (2) 根据上表在给定坐标系中画出频率分布直方图, 并根据样本估计总体数据落在 [12.95, 13.95) 中的概率;
- (3) 根据样本, 对总体的平均值进行估计。

21. (本小题满分 12 分)

概率源于赌博, 下列是两种掷骰子 (各面数字为 1 到 6 的均匀正方体) 比大小的游戏:

- (1) 两人轮流掷一枚骰子, 直到有一方掷出 6 点即算他胜利, 并约定若每人都掷满 $n(n \in N_+)$ 次后还未分出胜负就算和局。求先掷者获胜的概率和双方和局的概率;
- (2) 两人先后各掷 $n(n \in N_+)$ 枚骰子, 分别取自己掷出的 n 枚骰子中最大点数和对方比大小。若先掷者掷得的最大点数为 5, 求此时他能获胜的概率和双方和局的概率。

22. (本小题满分 14 分)

是否存在等差数列 $\{a_n\}$, 使得等式 $C_n^0 + \frac{C_n^1}{a_1} + \frac{C_n^2}{a_2} + \cdots + \frac{C_n^{n-1}}{a_{n-1}} + \frac{C_n^n}{a_n} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$ 对

一切 $n \in N_+$ 都成立? 证明你的结论。

2006—2007 学年度下学期期中阶段测试高二年级
数学试题参考答案及评分标准（文科）

一、选择题

1. A 2. C 3. C 4. B 5. C 6. B 7. B 8. A 9. D 10. D 11. D 12. C

二、填空题

13. 48 14. 24 15. 9 16. 97

三、解答题

17. 由已知得 $\begin{cases} 0 \leq x \leq 8 \\ 0 \leq x - 2 \leq 8 \end{cases} \quad \therefore 2 \leq x \leq 8 \quad \text{①} \cdots \cdots 2 \text{ 分}$

原不等式化为 $\frac{8!}{(8-x)!} < 6 \times \frac{8!}{(10-x)!} \cdots \cdots 4 \text{ 分}$

$\therefore 1 < \frac{6}{(10-x)(9-x)} \quad \text{即} \quad x^2 - 19x + 84 < 0 \cdots \cdots 6 \text{ 分}$

解得 $7 < x < 12 \quad \text{②} \cdots \cdots 8 \text{ 分}$

由①②知 $7 < x \leq 8 \cdots \cdots 10 \text{ 分}$

又 $\because x \in N \quad \therefore \text{原不等式的解集为 } \{8\} \cdots \cdots 12 \text{ 分}$

18. (1) $P_3(3) = 0.6^3 = 0.216 \quad \cdots \cdots 4 \text{ 分}$

(2) $P_3(1) = C_3^1 0.6 \times 0.4^2 = 0.288 \quad \cdots \cdots 8 \text{ 分}$

(3) $P_3(1) + P_3(2) + P_3(3) = 1 - P_3(0) = 1 - 0.4^3 = 0.936 \quad \cdots \cdots 12 \text{ 分}$

19. (1) 由已知得

$$\begin{cases} 2^n = 10 \\ 1 + C_n^1 p + C_n^2 p^2 = 201 \end{cases}, \quad \text{解得 } n = 10, p = -\frac{20}{9} \text{ (舍去) 或 } p = 2,$$

$\therefore n = 10, p = 2 \quad \cdots \cdots 4 \text{ 分}$

(2) 设 $(1+2x)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{10}x^{10}$

令 $x=1$ 得 $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = 3^{10}$ ①

令 $x=-1$ 得 $a_0 - a_1 + a_2 - \cdots - a_{10} = 1$ ②

((①--②) / 2 得 $a_1 + a_3 + \cdots + a_9 = \frac{3^{10}-1}{2} = 29524$ 。.....8 分

(3) 设 $(1+2x)^{10}$ 展开式中系数最大的项为 T_{r+1} ，则 $T_{r+1} = C_{10}^r (2x)^r$ 的系数为 $C_{10}^r 2^r$

则 $\begin{cases} C_{10}^r \cdot 2^r \geq C_{10}^{r-1} \cdot 2^{r-1} \\ C_{10}^r \cdot 2^r \geq C_{10}^{r+1} \cdot 2^{r+1} \end{cases}$ 解得 $\frac{19}{3} \leq r \leq \frac{22}{3}$

又 $\because r \in N$, $\therefore r = 7$

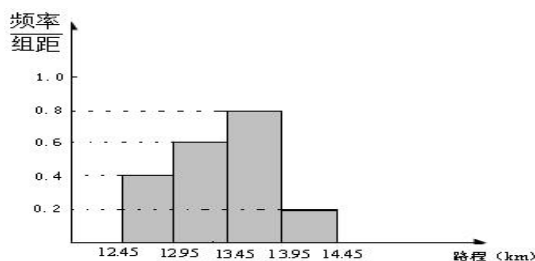
因此，展开式中系数最大的项为 $T_8 = C_{10}^7 (2x)^7 = 15360x^7$ 。.....12 分

20. (1) 频率分布表:

分组	频数	频率
[12.45, 12.95)	2	0.2
[12.95, 13.45)	3	0.3
[13.45, 13.95)	4	0.4
[13.95, 14.45)	1	0.1
合计	10	1.0

.....3 分

(2) 频率直方图:



.....6 分

组距为 0.5，故估计总体数据落在 $[12.95, 13.95]$ 中的概率为 $0.3+0.4=0.7$,

.....9 分

(3) $\bar{x} = \frac{13.7+12.7+\cdots+13.4}{10} = 13.4$ ，因此，总体的平均值为 13.4。

.....12 分

21. (1) 不妨设甲先掷, 设 A_k 表示事件“甲在自己第 k 次投掷获胜”,

设 B_k 表示事件“乙在自己第 k 次投掷获胜”, A 表示事件“甲整个比赛获胜”,

$$\begin{aligned}
 P(A) &= P(A_1 + \bar{A}_1 \cdot \bar{B}_1 \cdot A_2 + \bar{A}_1 \cdot \bar{B}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{B}_2 \cdot A_3 + \cdots + \bar{A}_1 \cdot \bar{B}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{B}_2 \cdots \bar{A}_{n-1} \cdot \bar{B}_{n-1} \cdot A_n) \\
 &= P(A_1) + P(\bar{A}_1 \cdot \bar{B}_1 \cdot A_2) + P(\bar{A}_1 \cdot \bar{B}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{B}_2 \cdot A_3) + \cdots + P(\bar{A}_1 \cdot \bar{B}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{B}_2 \cdots \bar{A}_{n-1} \cdot \bar{B}_{n-1} \cdot A_n) \\
 &= \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \cdots + \left(\frac{5}{6}\right)^{2(n-1)} \cdot \frac{1}{6} \quad \cdots \cdots 3 \text{ 分} \\
 &= \frac{1}{6} \left[\frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{2n}}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2} \right] = \frac{6 \cdot [1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{2n}]}{11} \quad (n \in N_+) \quad \cdots \cdots 4 \text{ 分}
 \end{aligned}$$

易知事件“双方和局”可以表示为:

$$B = \bar{A}_1 \cdot \bar{B}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{B}_2 \cdots \bar{A}_n \cdot \bar{B}_n, \text{ 其概率为 } P(B) = \left(\frac{5}{6}\right)^{2n} \quad (n \in N_+).$$

$$\text{即先掷者获胜概率为 } \frac{6 \cdot [1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{2n}]}{11}, \text{ 双方和局概率为 } \left(\frac{5}{6}\right)^{2n} \quad (n \in N_+). \quad \cdots \cdots 6 \text{ 分}$$

(上述事件独立性和互斥性显然, 说明略)

(2) 设 R 表示事件: “后掷者最大点数恰好为 5”,

S_5 表示事件: “后掷者最大点数不超过 5”, S_4 表示事件: “后掷者最大点数不超过 4”,

则 R 即 “双方和局”, S_4 即 “先掷者获胜”, 且 $R + S_4 = S_5$, R 与 S_4 是互斥事件,

$$\text{故 } P(S_5) = P(R) + P(S_4), \quad \cdots \cdots 8 \text{ 分}$$

$$\text{易知: } P(S_4) = \frac{4^n}{6^n}, \quad \cdots \cdots 10 \text{ 分}$$

$$\text{故 } P(R) = P(S_5) - P(S_4) = \frac{5^n}{6^n} - \frac{4^n}{6^n} = \frac{5^n - 4^n}{6^n} \quad (n \in N_+).$$

$$\text{即先掷者获胜概率为 } \frac{4^n}{6^n}, \text{ 双方和局概率为 } \frac{5^n - 4^n}{6^n} \quad (n \in N_+). \quad \cdots \cdots 12 \text{ 分}$$

22. 假设存在等差数列 $\{a_n\}$ 满足题意，则取 n 分别等于 1、2、3、4 得：

$$\begin{cases} C_1^0 + \frac{C_1^1}{a_1} = \frac{2^{1+1}-1}{1+1} \\ C_2^0 + \frac{C_2^1}{a_1} + \frac{C_2^2}{a_2} = \frac{2^{2+1}-1}{2+1} \\ C_3^0 + \frac{C_3^1}{a_1} + \frac{C_3^2}{a_2} + \frac{C_3^3}{a_3} = \frac{2^{3+1}-1}{3+1} \\ C_4^0 + \frac{C_4^1}{a_1} + \frac{C_4^2}{a_2} + \frac{C_4^3}{a_3} + \frac{C_4^4}{a_4} = \frac{2^{4+1}-1}{4+1} \end{cases} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

求得 $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 4, a_4 = 5, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

猜想 $a_n = n+1, (n \in N_+)$ 。 $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

下面证明： $\because C_{n+1}^{k+1} = \frac{n+1}{k+1} C_n^k, \quad \therefore \frac{C_n^k}{k+1} = \frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1}, \text{ 即 } \therefore \frac{C_n^k}{a_k} = \frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1}。$

$\therefore$ 等式左边

$$\begin{aligned} &= C_n^0 + \frac{C_{n+1}^2}{n+1} + \frac{C_{n+1}^3}{n+1} + \dots + \frac{C_{n+1}^{n+1}}{n+1} = C_n^0 + \frac{1}{n+1} (C_{n+1}^2 + C_{n+1}^3 + \dots + C_{n+1}^{n+1}) \\ &= C_n^0 + \frac{1}{n+1} [(C_{n+1}^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + C_{n+1}^3 + \dots + C_{n+1}^{n+1}) - C_{n+1}^0 - C_{n+1}^1] \\ &= 1 + \frac{1}{n+1} [2^{n+1} - 1 - (n+1)] = \frac{2^{n+1}-1}{n+1} = \text{右边}。 \dots\dots\dots 12 \text{ 分} \end{aligned}$$

因此，存在等差数列 $a_n = n+1, (n \in N_+)$ 满足题意。 $\dots\dots\dots 14 \text{ 分}$

(省略猜想步骤，只要存在性的构造和推理正确亦可)